布朗運動論

原著者 飛田武幸
譯著者 蔡聰明

曉園出版社 印行
世界图书出版公司

布朗運動論

原著者 飛田武幸
譯著者 蔡聰明

國立編譯館 主編
曉園出版社 印行
世界圖書出版公司

布朗运动论

蔡聪明　译著

晓园出版社　印行
世界图书出版公司北京分公司重印
（北京朝内大街137号）
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
1992年2月重印　850×1168 1/32
1992年2月第1次印刷　印张：13.5
印数：0,001—1,000
ISBN7-5062-1152．1/0.11
定价：9.00元

中 文 版 序

我的書“ブラウン運動”（Brown運動論）被翻譯成中文，這是我甚感高興的事。有此譯本，我將會得到更多在 Brown 泛函的解析這個領域中工作的朋友。

近年來數學的趨勢與風尚迫使需要對隨機分析學作新的發展；因此希望本書的出版能夠在這方面有拋磚引玉之效。

我很感謝蔡聰明教授的優秀翻譯工作，並且也要謝謝楊維哲教授對此工作的推動與鼓勵。

名古屋，1986 年 10 月

飛田武幸

英文版序

自從本書的日文版發行以來（1975，岩波），在這個領域中又有了一些有趣的新發展。作者趁此機會稍作補述，並且對一些尚待研究的問題提出建議，希望因而能夠激發在這個領域中工作的讀者。由於這些理由，我們多加了第八章的材料。

在本版中，作者除了多加一章以及作一些微小的更動之外，其餘都是根據原日文版忠實地翻譯成英文。

J.L. Doob教授給予英文版許多有益的批評，在此我們要特別感謝他。

飛田武幸

T.P. Speed

原　　序

Robert Brown（在 1827 年）觀察到懸浮在溶液中的花粉微粒不斷地作複雜與不規則的運動。經過許多年之後，Brown 運動變成了純數學及應用數學熱烈研究的對象。甚至一直到今天，Brown 運動的許多重要性質還在陸續被發現，並且無疑地還有新的而有用的層面等待着我們去發掘。今日，對於 Brown 運動我們已逐漸有了更多且更深刻的了解。

要對 Brown 運動作數學上的研究必須包括下面幾個方面：

1. 將 Brown 運動看作是最基本的一個隨機過程來研究，這是Brown 運動的機率層面；
2. 透過 Brown 運動引出函數空間上一個最有趣的Wiener 測度，進一步探討這個空間上的分析學；
3. 發展一套工具以便描述在自然環境中出現的隨機事件，例如生物器官的功能；
4. 對於牽涉到 Brown 運動的隨機現象，提出從基礎到廣泛應用的理論架構。

作者希望，本書能夠作爲研究這些論題的入門。

專就論題(1)而言，目前已有許多好書可參看。這些書探討 Brown 運動時，多半是將它看作Gauss 過程或 Markov過程來研究。因此本書不再從這個觀點作詳細解說，但我們還是作了簡要的討論。關於論題(2)，這是我們最着力的主題，構成了本書的主要部分。本書與其說是研究作爲隨機過程的Brown 運動本身，不如說是研究由 Brown 運動引起的分析學要來得恰當。當這套分析學建立起來後，我們就轉到一些應用上去，這些應用都牽涉到有關 Brown 運動的非線性泛函（通常叫做 Brown 泛函）。至於論題(3)與(4)，由於它們近年來的快速與成功的發展，使得我們無法等待到系統地建立後，才加以研究。我們僅從這些領域中選出一些問題來討論，

必要時也連帶地解說隱藏在處理過程背後的觀念，在此我們預期這兩個領域的未來將有一個豐碩的收穫。

現在該從 Brown 運動論的簡史說起。我們不預備講種種發展的完備史，而只就特定的觀點粗略勾劃一下 Brown 運動的歷史。我們要追尋理論的起源，並且探討Brown 運動是如何進入數學領域的。

故事由1820年代開始。在1827年的六月，七月，八月，Robert Brown（F.R.S）使用一個簡單的顯微鏡，其中一個鏡片之焦距約爲1毫米，觀察含在植物花粉中的微小粒子。他看到這些粒子作着高度不規則的運動，今日稱之爲“Brown 運動”。他把觀察結果寫出來，發表了1828年的報告。後來又經過更進一步的觀察，包括對不同種類的物質的觀察，使他相信他在有機體與無機體中發現了活的分子。據此，許多科學家嘗試解釋這個怪異現象，建立了下面的結論：越細小的粒子運動得越快；運動會受熱的激發而變快；當溶液的黏度減低時，運動會變得更活躍。但是一直要等到上世紀末，人們才明白 Brown 運動的眞正原因。事實上，這種不規則運動是由於懸浮在液體中的花粉微粒與溶液的分子經過非常大量的碰撞而產生的。

根據這些顯然是獨立作的觀察與實驗，A. Einstein 在1905年首次從理論與定量的角度來處理Brown 運動。在同一年，Einstein 也發表了著名的狹義相對論及光量子論。

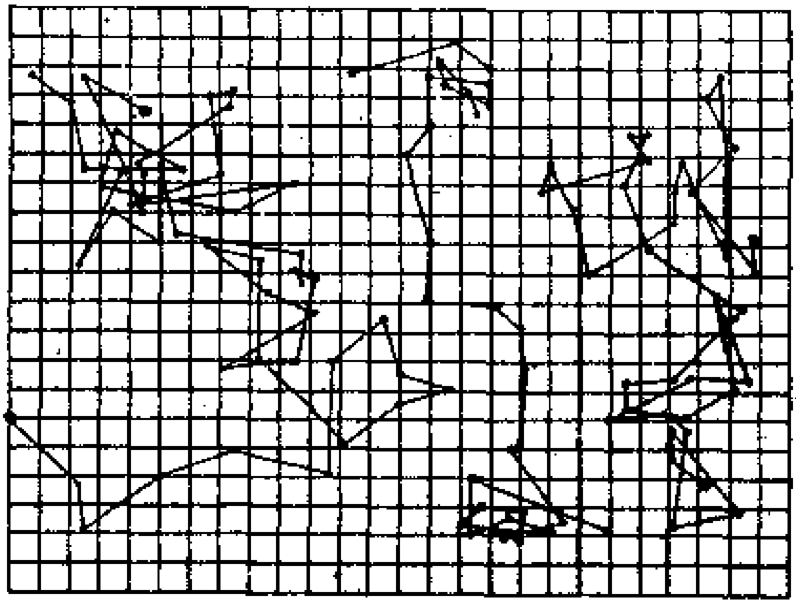


圖1

讓我們說明一下 Einstein 對 Brown 運動所建立的有趣的數學模型。爲了簡明起見，我們只考慮投影到直線的運動情形。在時刻 t 及 x 點處花粉微粒的密度記爲 $u(x, t)$，$x \in \mathbf{R}$。換言之，$u(x, t)$ 表示在 t 時刻及 x 點每單位長度花粉微粒的個數。我們要假設運動對時間與空間都具有齊性，故經過時間 τ 後花粉微粒從 x 點運動到 $x + y$ 點的比例，可記爲 $\varphi(\tau, y)$。今考慮時間從 t 走到 $t + \tau$（$\tau > 0$），就得到下式

$$u(x, t + \tau)\, dx = dx \int_{-\infty}^{\infty} u(x - y, t)\varphi(\tau, y)\, dy. \tag{0.1}$$

其中可設 u 與 φ 都是勻滑函數。復次，函數 φ 在空間中對稱於原點，並且具有正比於 τ 的方差：

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(\tau, y)\, dy = D\tau, \qquad D \text{ 爲常數}$$

當 τ 很小時，對（0.1）式作 Taylor 展開，得到

$$u(x, t) + \tau u_t(x, t) + o(\tau)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u(x, t) - yu_x(x, t) + \frac{1}{2} y^2 u_{xx}(x, t) - \cdots \right\} \varphi(\tau, y)\, dy.$$

由此式及上述的假設，就得到熱傳導方程

$$u_t = \frac{1}{2} D u_{xx}. \tag{0.2}$$

如果微粒的初期狀態爲某一點 y（比如說），亦即 $u(x, 0) = \delta(x - y)$，則由（0.2）式解得

$$u(x, t) = (2\pi Dt)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x - y)^2}{2Dt} \right]. \tag{0.3}$$

這樣得到的 $u(x, t)$ 事實上就是將 Brown 運動看作是一個 Markov 過程時的遷移機率函數（參見第 2.4 節）。

我們要指出，公式(0.2)與(0.3)純是由理論推演得到的。同理也可證明常數D爲

$$D = \frac{RT}{Nf}. \tag{0.4}$$

其中R爲一普遍常數，只跟懸浮物質有關，T爲絕對溫度，N爲Avogadro 常數，f爲摩擦係數。值得注意的是，在1926年 Jean Perrin利用(0.4)式加上一系列的實驗，相當準確地決定了Avogadro常數。這些工作使我們看到理論與實驗之間的美妙平衡。

另外，我們不應忘記，其實在1900年左右L. Bacheiler 已經嘗試要去建立Brown 運動的數學理論。這我們點到爲止，不再作任何介紹。

接着介紹 P. Lévy 著名的工作。只要在數學中看到Brown 運動的名字，Lévy 1948 年的書(1956年出第二版)就會浮現。然而，我們要由Lévy 更早期有關泛函分析的工作開始說起，這可參考 P. Lévy (1951)的書。在這本書中，Lévy 把他的工作沿着一些母線貫串起來。這些工作在時間上可追溯到 1910 年。Lévy 早在 1910年左右，就開始對 Hilbert 空間$L^2([0,1])$上的泛函作分析工作，由此導致要對一個泛函$\varphi(x)$，$x\in L^2([0,1])$，計算平均值或積分。不幸的是，如衆所週知，在$L^2([0,1])$上並不存在一個類似於有限維歐氏空間上的Lebesgue 測度。因此 Lévy 對一個泛函引進了平均值的概念，定義如下：給一個泛函φ，我們要計算φ在半徑R圓心爲0(原點)的球$S(R)$上之平均值。爲此，令$\varphi_n(x^{(n)})$，$x^{(n)}\in S_n$，表示φ局限到$S(R)$的n維截形球S_n，並且令m_n爲φ_n在S_n上的平均值。當$n\to\infty$時，如果數列$\{m_n\}$收斂到極限μ，則自然地就定義φ在$S(R)$上的平均值爲μ。更明確地說，讓我們用一列階梯函數$\{x^{(n)}(t)\}$在L^2意味下逼近$x(t)$，其中$x^{(n)}(t)$在區間$[k/n,(k+1)/n]$上取常數值x_k，$0\le k\le n-1$。於是原假設“$x(t)$的L^2範數小於R”引渡爲對第n個逼近函數要求$\Sigma_{k=0}^{n-1} x_k^2\le nR^2$。如果我們將階梯函數$x^{(n)}(t)$看作是$n$維向量，則這個不等式定義出半徑爲$n^{1/2}R$的$n$維球$S_n$。因此$m_n$就等於$\varphi_n(x^{(n)})$對$S_n$上的均勻機率測度取平均值，並且若數列$\{m_n\}$的極限存在的話，極限值就應該解釋成$\varphi(x)$在

$S(R)$上的平均值。

下面是取自P. Lévy（1951）的簡單例子，可用來說明上述求平均值的步驟，也可用來顯示Gauss分佈如何由古典泛函分析中浮現。任取一點$\tau\in[0,1]$並且固定它，再取R上的一個函數f，令$\varphi(x)=f(x(\tau))$，$x\in L^2([0,1])$，可看出$\varphi_n(x^{(n)})$只是$x^{(n)}$的一個分量的函數，因此平均值m_n就等於$\varphi_n(x^{(n)})$對S_n上的均勻機率測度取期望值。由此得知（見第1.2節例3），當n很大時，球面上一點的一個坐標會介乎aR與bR之間的機率約為

$$(2\pi)^{-1/2}\int_a^b \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)dy. \tag{0.5}$$

如此這般，Gauss分佈出現了，而泛函的平均值為

$$m=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(Ry)\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)dy. \tag{0.6}$$

這種直觀處理法，對於更廣泛一類本質上是有窮維的泛函，仍然行得通，這使我們認識到，一般平均值就是對白噪聲的測度（第三章介紹）之積分。〔這個事實的一個解釋可在T. Hida與H. Nomoto（1964）的文章中找到〕，P. Lévy（1951）也討論了Laplace算子與Hilbert空間$L^2([0,1])$上的調和泛函。有趣的是，無窮維旋轉群（見第五章）的概念，其胚芽也可以在Lévy的這本書中找到。

當Lévy建立了獨立隨機變數和的理論後，他就開始研究獨立無窮小隨機變數的連續求和問題，得到了加法過程的正準分解。Brown運動恰好就是具有Gauss分佈的加法過程。更精確地說，Brown運動記為$\{W(t): t\geq 0\}$或簡記為$\{W(t)\}$就是滿足下面兩個條件的一個隨機過程（見定義2.1）：

(a) $W(0)=0$

(b) $\{W(t): t\geq 0\}$為Gauss過程，並且對任意t，h，具有$t+h>0$時，$W(t+h)-W(t)$的期望值為0，方差為$|h|$。

由這個定義得知，$\{W(t)\}$ 爲一個加法過程。

P. Lévy 利用內插法（第 2.3 節，(i) 講述）得到 Brown 運動的一個解析表現式，並且這個方法也變成要洞察 Brown 運動的奧妙和複雜性的一個非常有力工具。從 1930 年代的論文開始到他 1948 年的書，Lévy 對 Brown 運動所作的一系列偉大工作是舉世無匹的。在第二章裡我們要講述他的一部分工作，讀者將會對 Lévy 在機率論中的重要性，獲得一深刻印象。循著 Lévy 的工作，我們將討論作爲 Markov 過程的 Brown 運動，其樣本路徑的行爲及其更精細的構造，並且簡略解釋一下爲什麼我們必須對具有 Brown 運動爲根基的一般 Gauss 過程作線性表現。接着，我們很快地看一下多維參數的 Brown 運動，這也是 Lévy 引進的，用來展示其內在的、有趣的機率構造。

作爲隨機過程的 Brown 運動之研究以及 Lévy 有關泛函分析的工作，表面上看起來似乎沒有什麼關係，但事實上它們是一體的兩面，這由我們對 Brown 泛函的解析過程中可看出。理由我們粗略的解說於下：Brown 運動 $\{W(t): t \geq 0\}$ 的任意泛函可看作是 $\{\dot{W}(t): t \geq 0\}$ 的泛函（其中 $\dot{W}(t) = dW(t)/dt$）；並且後者較容易對付。這種泛函正好是一個隨機變數，具有期望值，並且期望值跟上面剛介紹過的［(0.6) 式之後］P. Lévy 之平均值一致。同理，我們發現到，對於 $\{W(t): t \geq 0\}$ 的泛函作其它方面的討論，在 Lévy 的泛函分析中總是可以找到對應。在本書第三章與第四章，我們要對這些作有系統的研究，其中也包括了上述的解說。

現在讓我們回溯到 N. Wiener 出版他的論文 "Differential space (1923)"（今日叫做 "Wiener 空間"）之時日。Wiener 這篇論文是研究 Brown 運動的一個里程碑，在序言中他承認受到 R. Gâteaux 與 P. Lévy 的工作很大的啓發。Wiener 似乎跟 Lévy 私下打過交道，討論有關無窮維向量空間上的積分，導致這篇著名論文。因爲 Brown 運動幾乎所有的樣本路徑都是連續的，所以 $\{W(t)\}$ 的機率分佈定義在連續函數空間上面。這樣得到的測度空間無他，恰好就是 Wiener 空間。此後由 Wiener（及其它許多人）進一步加以發展，並且應用到更一般的自然科學領域。

Wiener 的偉大工作，在他提出 "模控學"（Cybernetics）的觀念時（1948）達於頂點。在他著名的 "Cybernetics" 一書中，Wiener 加了

一個副標題——“動物和機器的控制與通訊”用以表示交互研究的重要性。

實際上，用這種辦法 Wiener 發現了其它領域中許多有趣的問題。我們要來了解他的想法並且照着去做。事實上，如果我們考察 Wiener 工作的數學層面，會認識到，由於對腦波的研究導致他將他的結果應用到 Brown運動的非線性泛函上去，甚至導致他討論它們的分析工作。在Wiener 有關工程與通訊理論的工作上，也可發現類似的作法，其中由於噪聲（noise）所產生的擾動，因而導致隨機過程的預測理論之產生。復次，由於討論Brown 運動的流（flow），使他對遍歷論也做出偉大的貢獻。總之，他創始了一支新的數學——無窮維函數空間上的分析學。對這支新數學的進一步研究啓迪了近代分析學的發展。

Wiener 在 1958 年出版的書，包括有演講筆記，其中也討論了“Cybernetics”一書中所引起的理論上之進展，包括 Wiener 空間上的非線性泛函的解析及其應用。我們受到這些書很深刻的影響，從其中我們看到了由實際問題出發以 Brown 運動爲主角所建立起來的機率論，這一美妙的過程。我們要強調的是，這樣得到的理論可以自然地應用到原問題，並且如人們所能期望的，進一步也可應用到新問題上去。這種回饋過程必會一再重覆地發生。

此地再注意一件事情。在Wiener的作法中，Fourier 變換扮演一個很重要角色。令人驚奇的是，雖然Fourier 變換本身跟Brown 運動具有密切關連，但是這個關連却深藏不露。在本書中我們要隨時隨地加以留意。

總而言之，我們可以說，Brown 運動的數學研究由Einstein 首開其端，再經過 Lévy 與 Wiener 作高度的發展，一直到今日仍有許多科學家繼續接棒下去。從一開始，Brown 運動論除了跟數學外也跟科學具有很密切的關係。作者相信這些關係將持續到未來。

作爲本書主題的選擇，我們的着眼點主要是拓展 Lévy 與 Wiener 的工作，但是等到完稿後，現在作者才深深感覺到這是多麼難以實現的工作，因而有無能爲力的挫折感。然而，伊藤清（1951 b，1953 a，及其它著作）美麗的工作鼓舞了作者，書稿終於完成了。在寫作過程中，我們也注意到了H. Yoshizawa（1969）與Y. Umemura（1965）的工作，他們引進無窮維旋轉群的概念，並且證明了它在研究白噪聲上的重要性。作者受惠

於這些工作很多。

第六章與第七章專注於白噪聲與旋轉群的複化問題。如果這兩者是“無窮維空間的調性分析”的基本概念，那麼它們的複化就顯得很自然了。

由前述可看出，除了第一章之外，其它每一章都可以說是沿着我們的主線目標寫就的。某些章裡，在未討論一個主題之前就先介紹其動機與一般觀念，這樣做希望對讀者有所助益，另一方面也可顯示出章與章之間的關連。一些不在本書發展主流中的材料與基本公式，蒐集在附錄裡。

我非常感謝在初稿與校稿階段H. Nomoto，M. Hitsuda及S. Takenaka諸位教授所給予的許多寶貴批評。我也要感謝岩波書店的N. Urabe先生，這本書是他建議作者寫的，另外在寫作期間及校稿階段他一直幫忙我，如果沒有他的幫忙，本書是無法完成的。現在本書已完工大吉，我要跟他共享這份喜悅。

我要把本書奉獻給我的兩位老師——吉田耕作教授與伊藤清教授，他們鼓勵我從事這件工作。

1974年5月

名古屋　　飛田武幸

目　　錄

第一章
基礎知識

本章我們複習本書必須用到的機率論的一些基本概念。我們不作廣泛的或完備的複習。對於引起我們的動機或有關本書基本路向的概念，我們講述得詳細一點，至於其它的概念則只簡要點到爲止。例如，有關無窮維間上的機率測度（第1.3，(iii)）的某些特性及一族Gauss型的隨機變數的某些刻劃，我們討論得相當詳細。有許多定理與命題，若其證明可以在標準機率書上找得到，我們就只敍述而不給證明，或只給出簡略的證明。至於詳細的證明及相關的論題，讀者可參看一些標準的書，比如說K. Itô（1953c），W. Feller（1968，1971）及J. L. Doob（1953）。

1·1　機率空間，隨機變數，及期望値

機率論建立在機率空間的概念上面。首先，我們有一個非空集Ω。在許多實際情形下，可以將每一元素$\omega \in \Omega$看作是一個參數，用來標示所討論的隨機現象的一個現實（realization）。其次，我們取$\mathbf{B}$爲Ω的一族子集，滿足下面三個條件：

1. $\Omega \in \mathbf{B}$；
2. 若$B_n \in \mathbf{B}$，$n = 1, 2, \cdots$，則$\bigcup_n B_n \in \mathbf{B}$；
3. 若$B \in \mathbf{B}$，則$B^c \in \mathbf{B}$，其中$B^c \equiv \Omega \setminus B$。

換言之，$\mathbf{B}$爲由Ω的子集所成的σ體或σ環（σ-algebra）。最後，我們有一個定義在$\mathbf{B}$上具有可列加性的集函數P，滿足：

1. $0 \leq P(B) \leq 1$，$\forall B \in \mathbf{B}$；
2. 若$B_n \in \mathbf{B}$，$n = 1, 2, \cdots$，且當$i \neq j$時，$B_i \cap B_j = \phi$，則

$$P\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_n P(B_n);$$

3. $P(\Omega)=1$。

如果Ω，$\mathbf{B}$，P滿足上面所述，則稱（Ω，$\mathbf{B}$，P）爲一**機率空間**。元素$B\in\mathbf{B}$稱爲**事件**，$P(B)$稱爲事件B的**機率**。B^c稱爲事件B的**補餘事件**。如果一族事件$\{B_\alpha;\ \alpha\in A\}$中任何兩個事件均不相交，即當$\alpha\neq\alpha'$時，$B_\alpha\cap B_{\alpha'}=\phi$，則通常就稱這一族事件是**互斥的**。

σ體$\mathbf{B}$的選取，隨着我們所要描述的隨機現象的性質而定。最簡單的σ體是取$\mathbf{B}=\{\phi,\Omega\}$，這對應定命的（deterministic）情形，對於本書而言，我們沒有興趣。一般而言，$\mathbf{B}$越大表示我們所能夠討論的事件越多，因而能夠更精細地來描述隨機現象。對於任意集Ω，由所有子集所成的σ體$\mathbf{B}=2^{\Omega}$，顯然含有最豐富的事件，但不幸的是，在其上通常無法定義一個適當的P。

對於任意機率空間（Ω，$\mathbf{B}$，P）而言，顯然P是可測空間（Ω，$\mathbf{B}$）上的一個測度，進一步滿足全測度爲1的條件，即$P(\Omega)=1$。因此，機率論常常借用測度論的術語；例如測度論中的"可測集"與"殆遍"（almost everywhere）在機率論中分別說成"事件"與"殆確"（almost surely）。使用機率術語有一個好處，就是對於所討論的問題有很直覺的了解。

在機率論中，獨立事件是一個很重要的概念，這在測度論中是不講的。今考慮機率空間（Ω，$\mathbf{B}$，P），設B_1，$B_2\in\Omega$爲兩個事件，如果

$$P(B_1\cap B_2)=P(B_1)P(B_2). \tag{1.1}$$

則稱B_1與B_2是**獨立的**。這個概念可以推廣到有窮多個事件，甚至任意多個事件的情形，如下：考慮一族事件$\{B_\alpha:\ \alpha\in A\}$，如果對於指標的任意有窮子集$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\subset A$，我們有

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}B_{\alpha_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}P(B_{\alpha_k}). \tag{1.2}$$

則稱此族事件是**獨立的**。更一般的情形，考慮一族σ體$\{\mathbf{B}_\alpha:\ \alpha\in A\}$，如果對於任意選取的$B_\alpha\in\mathbf{B}_\alpha$，（$\alpha\in A$），所成的一族事件$\{B_\alpha:\alpha\in$

A ｝是獨立的，則稱此族 σ 體是獨立的。

定義在機率空間（ Ω ，$\mathbf{B}$ ，P ）上的一個實值或複值可測函數 $X(\omega)$ 叫做一個隨機變數。回想一下，$\omega \in \Omega$ 可看作是一個參數，代表一個機運，因此 $X(\omega)$ 看作是對應於機運 ω 的數值。隨機變數的概念可以很容易推廣到取值於向量空間、函數空間甚或荷佈空間的情形。對於取值於函數空間的隨機變數，通常記爲

$$X(t, \omega), \qquad t \in T, \omega \in \Omega, \tag{1.3}$$

其中 T 爲有限或無限的區間，表示時軸。關於取值於荷佈空間的隨機變數，其詳細情形留待以後討論（第三章）。

如果一個複值隨機變數 $X(\omega)$ 相對於 P 是可積分的，那麼我們就說 X 的期望值存在，並且稱

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\, dP(\omega) \tag{1.4}$$

爲 X 的**期望值或平均值**。進一步，如果 $|X|^n$ 是可積分的，則稱 $E(X^n)$ 爲 X 的 n 級矩（nth order moment）。特別地，當一個實值隨機變數具有二級矩時，則稱

$$V(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E(X)^2 \tag{1.5}$$

爲 X 的**變異數或方差**（variance）。

令 $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ 爲定義在機率空間（ Ω ，$\mathbf{B}$ ，P ）上的一族隨機變數，對於每個 $\alpha \in A$ ，令 $\mathbf{B}(X_\alpha)$ 表示使得 X_α 爲可測的最小子 σ 體（ $\subset \mathbf{B}$ ）。如果 $\{\mathbf{B}(X_\alpha): \alpha \in A\}$ 是獨立的，則稱隨機變數族 $\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ 是獨立的。

考慮定義在同一機率空間上的兩族隨機變數 $\{X_\alpha: \alpha \in A_1\}$ 與 $\{X_\beta: \beta \in A_2\}$ ，如果每個 $B \in \mathbf{B}(\{X_\alpha\})$ 與 $B' \in \mathbf{B}(\{X_\beta\})$ 是獨立的，則稱此兩族隨機變數是獨立的。特別地，如果 $\{X_\alpha\}$ 只含一個隨機變數 X ，並且 $\{X\}$ 與 $\{X_\beta: \beta \in A_2\}$ 是獨立的，則通常我們就說 X 與 $\mathbf{B}(\{X_\beta\})$ 是獨立的。對於三族或更多族，甚或無窮多族的隨機變數，其獨立性的概念可仿上述兩族的情形加以定義。

1-2 例　子

要建構或決定一個機率空間，首先要認清我們所要分析的隨機現象的類型，以及所要研究的機率結構，然後適當選取Ω，B與P以符合這些目標。我們用一些例子來加以說明。値得注意的是，這些例子對於本書所要展開的主題也扮演着重要的角色。

【例 1】

由四個字母作成的一個簡單的點算模型。[取自W. Feller (1968)]

要描述四個字母a，b，c與d的隨機排列，我們建構機率空間於下：如果我們要討論這些字母最仔細的排列次序，那麼Ω必須取爲所有 $4!=24$ 種排列，記爲ω_1，ω_2，…，ω_{24} 所成的集合，而B取爲Ω的所有子集所成的族集。顯然B滿足σ體的三個條件(1)，(2)，及(3)。由於所討論的是隨機排列，這暗示我們可設每種排列ω_i出現的機會均等，因此P必須定義爲

$$P(B)=\frac{\#(B)}{24}\text{，其中}\#(B)\text{ 表示}B\text{所含的元素個數} \tag{1.6}$$

這個P顯然滿足(1)，(2)，(3)的條件。這樣我們就得到有關描述四個字母的隨機排列的一個機率空間。

利用這個機率空間，可以推導出下面的一些結果。比如，令A表"a排在第一個位置"的事件(即所有由a作開端的ω_i所成的集)，我們算得$P(A)=3!/4!=1/4$。復次，若B_1表"a排在b之前"的事件，B_2表"c排在d之前"的事件，則立即算得$P(B_1)=P(B_2)=1/2$，並且$P(B_1\cap B_2)=1/4$。因此B_1與B_2滿足(1.1)式，故它們是獨立的。

【例 2】

(Wiener機率空間)取Ω爲單位區間[0，1]，B爲Ω所有的Lebesgue可測子集所成的σ體，P爲Lebesgue測度，則(Ω，F，P)構成一個機率空間。此空間可用來簡潔地描述；從區間[0，1]中任取一點的機率問題。由於這個空間含有驚人的、豐富的測度理論上的構造，所以它是最重要的且最有用的機率空間之一；又因爲它經常出現並且被N. Wiener

使用過，故我們不妨稱之爲Wiener 機率空間。

對於 $\omega \in \Omega$ 作二進位展開，我們可定義一個序列 $\{X_n(\omega)\}$如下：如果ω允許兩種不同的二進位展開，則定義$X_n(\omega)=0$，$\forall_n$；否則定義$X_n(\omega)$爲1或-1，端視在ω的二進位展開中其第n位數字是1或0而定，$n=1,2,\cdots$。$\{X_n(\omega)\}$中的函數稱爲Rademacher函數。每個X_n都是B可測函數，因此是（Ω，B，P）上的一個隨機變數。更重要的是，$\{X_n(\omega):n=1,2,\cdots\}$爲一獨立的隨機變數所成的序列。

考慮不斷地且獨立地丟一個公正的銅板，這個隨機現象可以利用$\{X_n\}$數學地加以描述。如果ω爲描述丟銅板所實現出來的序列之機運，並且若第k次出現正面（或反面）就定義$X_k(\omega)=1$（或-1），然則第n次出現正面的事件就是$\{\omega:X_n(\omega)=1\}$，並且其機率爲1/2。再看另一個事件，令E_k表示正面首次在第k次出現，亦即$E_k=\{\omega:X_1(\omega)=X_2(\omega)=\cdots=X_{k-1}(\omega)=-1,X_k(\omega)=1\}$，則其機率爲$P(E_k)=2^{-k}$。事件集$\{E_k:k=1,2,\cdots\}$是互斥的，並且聯集$\cup_k E_k$表示正面終究要出現的事件。我們可以猜想得到

$$P\left(\bigcup_k E_k\right)=\sum_k P(E_k)=1.$$

對稱的隨機漫步（random walk）也可以利用$\{X_n\}$作出來。定義

$$S_n(\omega)=\sum_{k=1}^{n}X_k(\omega),\qquad n=0,1,\ldots,\tag{1.7}$$

其中令$S_0(\omega)$爲0。這些都定義在（Ω，B，P）上，我們看出$\{S_n(\omega)\}$描述着通常的對稱隨機漫步。

【例3】

（單原子的理想氣體的一個模型［取自M. Kac（1959）］）。

考慮單原子的理想氣體，共有N個分子所組成的孤立系統，我們要設法描述其速度分佈。假設每個粒子具有相同的質量m，其速度記爲v_k，$1\leq k\leq N$。氣體的能量只由動能所組成，故總能量等於個別粒子的動能總

和。由於這個和爲常數（$=E$），所以可以寫成

$$\frac{1}{2}m\sum_{k=1}^{N}\|v_k\|^2=E, \tag{1.8}$$

其中 $\|v\|$表三維向量v的範數。令速度向量爲$v_k=(v_{k,x}, v_{k,y}, v_{k,z})$，於是（1.8）式表示向量（$v_1$，…，$v_N$）恆落在$3N$維空間中，以原點爲中心，半徑爲（$2E/m$）$^{1/2}$的球面上。令$R=(2E/m)^{1/2}$，並且記此球面爲$S_{3N}(R)$。

由於我們的興趣在於速度分佈，很自然地，應該令$\Omega=S_{3N}(R)$。其次，由於我們要討論速度分量，比如$v_{k,x}$，於是必須考慮如下形的所有子集

$$B=\{\omega=(v_{1,x}, v_{1,y}, v_{1,z}, \ldots, v_{N,z}): a<v_{k,x}<b\}$$

因此我們取Ω的所有 Borel 集作爲σ體B。最後，因爲所有的氣體分子基本上均相同，並且可沿各方向運動而不受限制，故取P爲Ω上的均勻機率測度。

自然地，應該假設能量E正比於分子數N，亦即

$$E=\kappa N.$$

對適當的球面領域計算表面積，就可求得上述集B的機率爲

$$P(B)=\frac{\int_a^b(1-mx^2/2\kappa N)^{(3N-3)/2}\,dx}{\int_{-R}^{R}(1-mx^2/2\kappa N)^{(3N-3)/2}\,dx},$$

如果分子數N足夠大，則得到$P(B)$的一個漸近公式：

$$P(B)\sim\left(\frac{3m}{2\pi\cdot 2\kappa}\right)^{1/2}\int_a^b\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{3m}{2\kappa}x^2\right)dx.$$

令$k=3cT/2$（c爲一普遍常數，T爲絕對溫度），我們看出上式跟熟悉的Maxwell 公式一致［見M. Kac（1959）第一章］。

【例4】

（以密度作爲自然數集上的集函數［取自M. Kac（1959）］）。

考慮從自然數集N中，任取一數的實驗。假設每一數被取到的機會均等，我們的興趣是要爲這個隨機現象建構適當的機率空間。我們預期所欲建構的機率空間應該具有簡明的性質，譬如說：取到偶數的機率爲½；或更一般地，取到質數 p 的倍數之機率爲 $1/p$。

顯然地，Ω應該取爲N。其次由機會均等的假設，促使我們要嘗試用（1.6）的形式來定義 P。但是此地我們遇到了困難，因爲對某些有興趣的集 $B\subset\Omega$，可能 $\#B$ 與 $\#\Omega$ 都無限大。所以我們稍作修飾，定義：

$$P(B)=\lim_{N\to\infty}\frac{\#(B_N)}{N}. \tag{1.9}$$

其中 $B_N=\{n\in B: n\le N\}$。這個極限不恆存在，因此爲了方便起見，定義B爲由所有使得（1.9）式右邊極限存在的 $B\subset$ N所成的族集，然後對於B中的事件 B，其機率 $P(B)$ 就定義爲（1.9）式。由此可得，譬如說，由質數 p 的所有倍數所成的集 B^p 爲B中的一個事件，並且 $P(B^p)=1/p$。我們的目標似乎完成了。

不幸得很，對於上述定義的B與 P，並不滿足第1.1節中有關B與 P 的條件(2)。今舉一個不滿足 P 的條件(2)之反例。首先觀察到，單元集 $\{n\}$ 顯然屬於B，並且容易看出 $P(\{n\})=0$。但是 $\Omega=\cup_n\{n\}$ 且 $P(\Omega)=1$，因此

$$1=P(\Omega)\neq\sum_n P(\{n\}).$$

換言之，（Ω，B，P）並不是一個如前節所定義的機率空間。然而，這個 P 具有有窮加性：即若 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 爲B中的互斥元素，則 $\cup_1^n B_k\in$ B，且

$$P(B)=\sum_1^n P(B_k). \tag{1.10}$$

由於這個性質，（Ω，B，P）不妨稱爲一個弱意味的機率空間。

今利用此弱意味機率空間來考察整數的一些性質。令 p_1，p_2，…，p_k，…為所有質數所成的遞增數列，則任意 $n \in \mathbf{N}$ 皆可表成下形

$$n = p_1^{\alpha_1(n)} p_2^{\alpha_2(n)} \cdots p_k^{\alpha_k(n)} \cdots.$$

這個分解是唯一的，故唯一地定出 n 的函數 $\alpha_k(n)$，$k = 1$，2，…。因為在某種意味下，α_k 為 $\mathbf{B}$ 可測，故這些 α_k 可以看作是（Ω，$\mathbf{B}$，P）上的隨機變數。由定義可證明

$$P(\alpha_k = l) = p_k^{-l}(1 - p_k^{-1}),$$

其中左項是 $P(\{n : \alpha_k(n) = l\})$ 的簡寫。同理，可證明

$$P(\alpha_1 = l_1, \alpha_2 = l_2, \ldots, \alpha_k = l_k) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{-l_j}(1 - p_j^{-1}).$$

由於此項是 $P(\alpha_j = l_j)$ 的乘積，故 α_1，α_2，…可看作是（Ω，$\mathbf{B}$，P）上的獨立隨機率數列。

這個例子告訴我們，即使我們無法獲致眞正的機率空間，那麼討論弱意味的機率空間還是會有所收穫的。當然啦，此時，對於取極限的操作要特別小心，因為一般而言 P 與 $\mathbf{B}$ 都不具有可列加性。在第 3 章裡，我們將討論更多這種例子。

1-3 機率分佈

[1] 岸界分佈（finite-dimensional distributions）

如果 $X(\omega)$，$\omega \in \Omega$ 為定義在機率空間（Ω，$\mathbf{A}$，P）上的一個實值隨機變數，那麼"X 的值會落在某一給定區間"就是一個事件，因而可以指定其機率。更一般而言，我們可視 X 為從 Ω 到 $\mathbf{R}$ 的一個映射，並且在空間（$\mathbf{R}$，$\mathbf{B}$）上定義一個機率測度 Φ，其中 $\mathbf{B}$ 表 $\mathbf{R}$ 的 Borel 子集所成的 σ 體。Φ 的定義如下：對於任意 $B \in \mathbf{B}$，$\Phi(B)$ 為集 $X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\}$ 的 P 測度，亦即

$$\Phi(B) = P(X^{-1}(B)). \tag{1.11}$$

集$X^{-1}(B)$常記爲$(X\in B)$，因而$P(X^{-1}(B))$也記爲$P(X\in B)$。上述所得的測度Φ稱爲X的**機率分佈**（通常簡稱爲**分佈**）。

其次，我們令

$$F(x)=\Phi((-\infty,x]).\tag{1.12}$$

則$F(x)$稱爲X的**分佈函數**，且具有下列性質：

$$\begin{aligned}&1.\quad F(x)\text{ 爲右連續；}\\&2.\quad F(x)\text{ 爲單調、非遞減；}\\&3.\quad \lim_{x\to\infty}F(x)=1,\quad \lim_{x\to-\infty}F(x)=0.\end{aligned}\tag{1.13}$$

反過來，任給一個函數$F(x)$滿足上述三個性質，我們就可以定義一個區間函數Φ爲$\Phi([a,b])=F(b)-F(a)$，$a<b$，並且此Φ可以唯一延拓成$(\mathbf{R},\mathbf{B})$上的機率測度，仍記爲Φ，使得（1.12）式成立。因此F與Φ互相唯一決定，所以我們可以從其中的一個引渡到另一個，端視方便而定。

現在引進Φ（或F）的Fourier-Stieltjes變換$\varphi(z)$，$z\in\mathbf{R}$，定義如下：

$$\varphi(z)=\int_{\mathbf{R}}e^{izx}\,dF(x)=\int_{\mathbf{R}}e^{izx}\Phi(dx),\qquad z\in\mathbf{R}.\tag{1.14}$$

我們稱$\varphi(z)$爲X或分佈Φ或分佈函數F的**特徵函數**。立即看出$\varphi(z)$只不過是$\exp(izX)$對測度P取期望值而已，由上述定義，馬上看出下面的性質成立：

1. φ是正定的：即對任意有窮集$\{z_1,\cdots,z_n\}\subset\mathbf{R}$與$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\subset\mathbf{C}$，恒有

$$\sum_{j,k}\alpha_j\bar{\alpha}_k\varphi(z_j-z_k)\ge 0;\tag{1.15}$$

2. φ爲均勻連續；

3. $\varphi(0)=1$。

有關特徵函數最重要的事實是，上述結果之逆亦成立，亦即：

【定理 1.1】

（S. Bochner）如果 φ 爲滿足（1.15）三個條件的任意函數，則在（R，B）上存在唯一的機率測度 Φ 使得

$$\varphi(z)=\int_{\mathbf{R}} e^{izx}\Phi(dx). \tag{1.16}$$

這個定理的證明可以參看 S. Bochner（1932）或 K. Yosida（1951）。

下面定理就是 P. Lévy 的反演公式，它告訴我們如何由一個給定的特徵函數 $\varphi(z)$ 求得機率分佈 Φ。

【定理 1.2】

（P. Lévy）設 $\varphi(z)$ 爲 R 上機率分佈 Φ 的特徵函數，則對任意 $a<b$，下式成立：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\chi}_{[a,b]}(x)\,d\Phi(x)=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ibz}-e^{-iaz}}{-iz}\varphi(z)\,dz, \tag{1.17}$$

其中 $\bar{\chi}_{[a,b]}$ 定義如下

$$\bar{\chi}_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & a<x<b,\\ \frac{1}{2} & x=a,\ x=b,\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

利用上述公式，我們可以不含糊地得到（R，B）上的機率測度 Φ，因此，相應於 X 的三個物件 Φ、F 與 φ 形成了對射：

$$\Phi\leftrightarrow F\leftrightarrow\varphi.$$

於是我們看出，機率分佈或分佈函數的收斂可以用特徵函數的收斂來取代。但是在進行這件事之前，必須先澄清機率分佈的收斂意義。因爲分佈是

（R，B）上的測度，我們就採用弱收斂作爲分佈的收斂意味，亦即 $\Phi_n \to \Phi$ 是指對所有的 $f \in \mathscr{C}_0$。

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi_n(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi(dx),$$

其中 $\mathscr{C}_0$ 表定義在 R 上滿足條件 $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ 的連續函數全體，再賦予均勻收斂位相，這是個Banach空間。

令 φ_n，φ 分別爲 Φ_n，Φ 的特徵函數。下面是關於它們的收斂的一些重要結果。

【定理 1.3】

（P. Lévy，V. Glivenko）

1. 若 $\Phi_n \to \Phi$，則 $\varphi_n(z)$ 在 R 的任意緊緻子集上均勻收斂到 $\varphi(z)$。
2. 若 $\varphi_n(z)$ 收斂到 $\varphi(z)$，則 $\Phi_n \to \Phi$。

在下面的定理中，我們並不事先假定 $\varphi(z)$ 爲特徵函數。

【定理 1.4】

（P. Lévy）假設機率分佈 Φ_n 的特徵函數爲 $\varphi_n(z)$。若 φ_n 收斂到一個函數 $\varphi(z)$，並且在 $z=0$ 的某近旁上爲均勻收斂，則 $\varphi(z)$ 也是一個特徵函數，並且 $\Phi_n \to \Phi$，其中 Φ 爲相應於 φ 的機率分佈。

到現在爲止，所討論的內容都容易推廣到 $X(\omega)$ 取值於高維空間（向量值）的情形。這個推廣在（1.11）式之前完全一樣，但是（1.11）式之後就要小心一點，我們要注意幾點，例如：有關 F 的定義式（1.12），要改成：

$$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi\left(\prod_1^n (-\infty, x_k]\right),$$

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$。在（1.13）式中的(1)，(2)兩性質必須了解爲對每一變數 x_k 都有那些性質，並且(3)式要改成：

$$\lim_{x_1,\ldots,x_n\to\infty} F(x_1,\ldots,x_n) = 1,\ \text{並且對所有 } k,\ \lim_{x_k\to-\infty} F(x_1,\ldots,x_n) = 0.$$

復次，$F(x_1+h_1, x_2+h_2, \cdots, x_n+h_n)-F(x_1, x_2+h_2, \cdots, x_n+h_n)-\cdots-F(x_1+h_1, x_2+h_2, \cdots, x_n)+F(x_1, x_2, x_3+h_3, \cdots, x_n+h_n)+\cdots+(-1)^n\times F(x_1, x_2, \cdots, x_n)\geq 0$，$\forall h_1, h_2, \cdots, h_n \geq 0$。另外，特徵函數 $\varphi(z)$ 給如下式

$$\varphi(z)=\int_{\mathbf{R}^n} e^{i(z,x)}\Phi(dx), \qquad z\in\mathbf{R}^n, \tag{1.18}$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 爲 $\mathbf{R}^n$ 上的內積構造。此地可將變數 z 看作在偶伴空間 $(\mathbf{R}^n)^*$ 中變動，而 x 在 $\mathbf{R}^n$ 中變動。上述諸定理，經過適當的修飾後，對於這種高維空間的情形也都成立。

因爲我們的分佈都是歐氏空間上的機率測度，故利用分析學中的基本工具，如Borel 測度的Fourier-Stieltjes 變換，就可以淸楚地描述它們的性質。但是當 $X(\omega)$ 爲無窮維隨機變數時，可能就沒有適當工具可用，故要將有窮維的結果類推到無窮維，必須小心一點。這在下面兩小段中我們將加以說明。

[2] 隨機過程及其分佈

我們先給出一些定義。由隨機變數所組成的一個系統 $\{X(t,\omega): t\in T\}$，可用來作爲描述隨機演化現象的數學模型，其中 t 想像成時間參數，T 爲時軸。

【定義 1.1】

當參數集 T 是有序時，則系統 $\{X(t,\omega): t\in T\}$ 稱爲一個隨機過程。

通常我們記爲 $\{X(t): t\in T\}$ 或 $\{X(t)\}$，並且直稱爲一個過程。如果參數集 T 爲實數集 $\mathbf{R}$ 的有窮或無窮區間，則稱 $\{X(t)\}$ 爲一個具連續參數的過程。如果 T 爲整數集 $\mathbf{Z}$ 或自然數集 $\mathbf{N}$，則稱 $\{X(t)\}$ 爲一個具離散參數的過程。T 還可有其它的選擇，例如可取 T 爲 n 維歐氏空間 $\mathbf{R}^n$（$n>1$）或 $\mathbf{R}^n$ 的一個連通開子集，甚至是Riemann 空間。但在本書中，主要是討論具連續參數的隨機過程，其中 T 爲 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}$ 中的區間，例如[0 ,

∞ ）或［0，1］；因此我們不用煩惱那麼多。對於取定的 ω，我們稱函數 $t \to X(t, \omega)$，爲隨機過程的**樣本路徑**或**樣本函數**。

將 $\{X(t, \omega): t \in T\}$ 看作是取值於 $\mathbf{R}^T$ 的無窮維隨機向量，於是可仿照有窮維的情形定義其機率分佈。考慮 $\mathbf{R}^T$ 中形如

$$A = \{x \in \mathbf{R}^T: (x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)) \in B_n\} \tag{1.19}$$

的子集，其中 $\mathbf{B}_n$ 爲 $\mathbf{R}^n$ 中的 Borel 集。具有這種形狀的集 A 稱爲**柱集**。對於固定的 $t_1, \cdots, t_n$，讓 $\mathbf{B}_n$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的所有 Borel 集變動，就得到所有柱集所成的 σ 體，記爲 $\mathfrak{B}^{(t_1, \cdots, t_n)}$。對任意形如（1.19）式的集 A，我們定義

$$\Phi_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(A) = P((X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)) \in B_n), \tag{1.20}$$

於是得到可測空間（$\mathbf{R}^T$，$\mathfrak{B}^{(t_1, \cdots, t_n)}$）上的一個機率測度 $\Phi_{t_1, t_2, \ldots, t_n}$。考慮所有有窮子集 $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\} \subset T$，於是得到一族測度 $\Phi = \{\Phi_{t_1, t_2, \ldots, t_n}\}$，滿足下面的**共容性條件**（Consistency Condition）：即若（1.19）式的柱集 A 具有另一表式，比如說

$$A = \{x \in \mathbf{R}^T: (x(s_1), x(s_2), \ldots, x(s_m)) \in B_m\},$$

則下面的等式成立

$$\Phi_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(A) = \Phi_{s_1, s_2, \ldots, s_m}(A).$$

令 $\mathfrak{A}^T$ 表 $\mathbf{R}^T$ 中的柱集全體，由上述的討論知，在（$\mathbf{R}^T$，$\mathfrak{A}^T$）上有一個有窮加性的測度 $\widetilde{\Phi}$，使得 $\widetilde{\Phi}$ 局限到 $\mathfrak{B}^{(t_1, \cdots, t_n)}$ 時，正好就是 $\Phi_{t_1, t_2, \cdots, t_n}$。記 $\mathfrak{B}^T$ 爲由 $\mathfrak{A}^T$ 所產生的最小 σ 體，$\mathfrak{B}^T$ 的元素稱爲 $\mathbf{R}^T$ 的 Borel 集。下面的定理就是週知的 Kolmogorov **延拓定理**。

【定理 1.5】

在（$\mathbf{R}^T$，$\mathfrak{A}^T$）上定義的集函數 $\widetilde{\Phi}$ 可以唯一地延拓成（$\mathbf{R}^T$，$\mathfrak{B}^T$）上的一個機率測度。

此地我們不給出證明，但是類似的結果在以後的第 2.1 節及第 3.2 節會詳加討論。

【定義 1.2】

定理 1.5 的機率測度Φ就叫做隨機過程 $\{X(t):t\in T\}$ 的分佈。

現在我們已定義出 $\{X(t)\}$ 的分佈。反過來，對於 $(\mathbf{R}^T,\mathfrak{B}^T)$上的機率測度Φ，存在一個以Φ爲分佈的隨機過程。這很容易辦到。今作於下：令 $\Omega=\mathbf{R}^T$，其元素記爲 $\omega=(\omega(t):t\in T)$，再令 $\mathbf{B}=\mathfrak{B}^T$，$P=\Phi$。我們定義 $X(t,\omega)=\omega(t)$，$t\in T$，$\omega\in\Omega$，則顯然 $\{X(t):t\in T\}$爲一個隨機過程，以Φ爲機率分佈。

現在我們可以給出一個重要的註記。$\{X(t)\}$的分佈Φ定義所在的空間 $\mathbf{R}^T$，一般而言，太大了。而且Φ的擔台往往只是 $\mathbf{R}^T$ 的一個很小的子集。例如，如果假設樣本路徑具有某種連續性（當然有各種連續性），則可利用相當巧妙的辦法得到Φ在 $\mathbf{R}^T$ 中的擔台子集。

對於任意隨機過程 $\{X(t):t\in T\}$，要給予進一步的構造，常見的辦法是要求隨機變數 $X(t)$，$t\in T$ 之間具有某種關連，下面就開始來討論這個問題。

【定義 1.3】

假設參數集 T 爲 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{Z}$。

1. 如果對任意 $h\in T$，$\{X(t+h):t\in T\}$ 的分佈 Φ_h 與 $\{X(t):t\in T\}$ 的分佈Φ相同，則稱 $\{X(t)\}$爲一個**強平穩過程**（Strictly Stationary process），或簡稱爲平穩過程。
2. 如果每個 $X(t)$ 都具有二級矩，並且

$$E(X(t))=m \quad （常數）$$
$$E((X(t+h)-m)(X(t)-m))=\gamma(h) \quad （跟 t 無關）$$

則稱 $\{X(t):t\in T\}$ 爲一個**弱平穩過程**（Weakly Stationary process），並且稱 $\gamma(h)$ 爲 $\{X(t)\}$ 的**協變函數**（Covariance function）。

顯然，一個具有有窮二級矩的強平穩過程是一個弱平穩過程。通常我們對弱平穩過程還假設它具有均方連續（mean-square Continuous），亦

即

$$\lim_{h\to 0} E(|X(t+h)-X(t)|^2)=0. \tag{1.21}$$

加上這個假設，$\{X(t)\}$就變成Hilbert 空間$L^2(\Omega, B, P)$中的一條連續的螺旋線，因此Hilbert空間的理論可以派上用場。令$M_t(X)$爲由$X(s)$，$s\le t$，所生成的$L^2(\Omega, B, P)$之閉線性子空間。如果$M_t(X)$爲一個常子空間，即它不隨着t而變動，則稱$\{X(t)\}$是定命的（deterministic）。另一方面，如果

$$\bigcap_t M_t(X)=\{1\}, \tag{1.22}$$

其中$\{1\}$表示由常向量所生成的一維子空間，則稱$\{X(t)\}$是**完全非定命的**（purely non-deterministic）。所謂Wold分解是將一般弱平穩過程分解成兩部分，其中一部份是定命的，另一部分是完全非定命的。當然，還有介乎其間很廣泛的一類，比如不是定命的過程，這些叫做**非定命的**（non-deterministic）。

另一個研究平穩過程很有威力的工具是頻譜分析。爲了應用這個理論，假設$X(t)$取複値是很方便的。對這種情形，協變函數取爲$E((X(t+h)-m)(\overline{X(t)-m}))$。

當我們按隨機變數$X(t)$，$t\in T$，的相依性來對隨機過程作分類時，首先就遇到另一類重要的隨機過程，叫做Markov過程。這類過程在以後（第2.4節）會詳加討論。

今後，我們也經常會遇到Gauss過程，其重要性即使一再強調也不爲過。如果一個隨機過程$\{X(t)\}$的任何岸界分佈都是Gauss型分佈，則稱爲Gauss過程。這類過程我們從第1.6節之後就會詳加討論。

對於具連續參數的隨機過程，還可以推廣成所謂的**隨機荷佈**（random distribution）或**廣義隨機過程**（generalized stochastic process）。考慮機率空間(Ω, B, P)上的一族隨機變數$\{X(\xi,\omega):\xi\in E\}$，其中參數集爲某一函數空間$E$（通常假設其爲核式空間，參見附錄第A.3節）。如果對殆遍的ω，$X(\xi,\omega)$爲ξ的一個連續線性泛函，亦即$\xi(\cdot,\omega)$爲一個荷佈，則稱$\{X(\xi,\omega):\xi\in E\}$爲一個隨機荷佈。爲了要定義

$\{X(\xi)\}$的分佈，我們必須克服許多不同種類的困難。白噪聲是隨機荷佈的一個典型例子，這是本書的主題之一，我們在第3章會對它作系統而簡要的討論。

[3]　無窮維空間上的分佈

當我們要在無窮維空間上引入機率測度（或分佈）時，必須注意兩個來源。首先是有關無窮乘積測度的Kakutani 定理，這個乘積測度是由於研究獨立隨機變數所成的無窮序列引起的；其次是研究無窮維空間上的測度之擔台（Support，carrier）而引起的。這兩種測度都不容易單獨由有窮維空間上的測度類推或猜測而得到。本小段我們要探討Kakutani 定理及其應用，而有關無窮維測度的擔台問題，則留待以後再講述。

在可測空間（Ω，B）上取兩個機率測度P與P'，再取一個機率測度Q相對於P與P'皆爲絕對連續，亦即$P \ll Q$且$P' \ll Q$，例如，可取Q爲½（$P+P'$）。令

$$\psi = \left(\frac{dP}{dQ}\right)^{1/2}, \qquad \psi' = \left(\frac{dP'}{dQ}\right)^{1/2},$$

其中dP/dQ表示P對Q的Radon-Nikodyn 密度。因爲ψ與ψ'對於Q皆爲平方可積分，故下式是適當的定義（well-defined）：

$$\int_\Omega \psi(\omega)\psi'(\omega)\, dQ(\omega) = \rho(P, P'). \tag{1.23}$$

函數ρ的取法跟Q無關，我們論證如下：假設Q'爲（Ω，B）上的另一個機率測度，滿足$P \ll Q'$且$P' \ll Q'$，再設$Q \ll Q'$，則利用Q'所得到的ρ值爲

$$\int_\Omega \left(\frac{dP}{dQ'}\right)^{1/2} \left(\frac{dP'}{dQ'}\right)^{1/2} dQ',$$

此式又可寫成

$$\int_{\Omega}\left(\frac{dP}{dQ}\right)^{1/2}\left(\frac{dQ}{dQ'}\right)^{1/2}\left(\frac{dP'}{dQ}\right)^{1/2}\left(\frac{dQ}{dQ'}\right)^{1/2}dQ'=\int_{\Omega}\left(\frac{dP}{dQ}\right)^{1/2}\left(\frac{dP'}{dQ}\right)^{1/2}dQ.$$

因此這跟利用Q所得到的(1.23)式相同。其次對於$Q\ll Q'$不一定成立的一般情形,我們可取到第三個測度Q''使得$Q\ll Q''$與$Q'\ll Q''$,然後利用上述的結果得知,利用Q''與Q所得的ρ相同。同理利用Q'與Q''所得的ρ也相同,Q與Q'定義出相同的ρ值。

【命題 1.1】

上述定義的函數$\rho(P,P')$滿足下列性質:

1. $\rho(P,P')=\rho(P',P)$;
2. $0\leq\rho(P,P')\leq 1$;
3. $\rho(P,P')=1$ 等價於$P=P'$,
4. $\rho(P,P')=0$ 等價於P與P'互為奇異。

【證明】

1. 是顯然的。
2. 不等式$0\leq\rho(P,P')$也是顯然的。其次證明另一半的不等式,我們對(1.23)式應用Schwartz 不等式,得到

$$\rho(P,P')^2\leq\int_{\Omega}\psi(\omega)^2\,dQ(\omega)\int_{\Omega}\psi'(\omega)^2\,dQ(\omega)=1.$$

附帶地,上式等號成立的充要條件是$\psi(\omega)/\psi'(\omega)=$常數$(=1)$, a.e.$Q$,這就證明了(3)。

4. 等式$\rho(P,P')=0$等價於

$$\psi(\omega)\psi'(\omega)=0\quad\text{a.e.}\quad Q$$

這表示P與P'互為奇異。

【註記】 直觀地說，當 $\rho(P, P')$ 越接近 1 時，P 與 P' 越相似。在這些進展下，如果對某類機率測度需要給一個距度（metric），則

$$d(P, P') = \left\{\int_\Omega |\psi(\omega) - \psi'(\omega)|^2 \, dQ(\omega)\right\}^{1/2}$$

是適當的對象。它是一個距度，並且跟 ρ 的關係爲

$$d(P, P') = \{2[1 - \rho(P, P')]\}^{1/2}. \tag{1.24}$$

利用函數 ρ 可以判別兩個無窮乘積測度的等價性或奇異性。設（Ω，$\mathbf{B}$）爲一列可測空間（Ω_n，$\mathbf{B}_n$），$n = 1$，2，…，的乘積空間，其中

$$\Omega = \prod_n \Omega_n, \quad \mathbf{B} = \prod_n \mathbf{B}_n$$

令 P_n 與 P'_n 皆爲（Ω_n，$\mathbf{B}_n$）上的機率測度，滿足：

【假設】 對每個 n，P_n 與 P'_n 是等價的，$n = 1$，2，…。今作 P_n，$n \geq 1$ 與 P'_n，$n \geq 1$ 的直積，分別得到機率測度 P 與 P'：

$$P = \prod_n P_n, \quad P' = \prod_n P'_n.$$

【定理 1.6】

［S. Kakutani（1948）］

1. P 與 P' 或者等價，或者奇異。它們爲等價［或奇異］的充要條件是

$$\prod_n \rho(P_n, P'_n) > 0 \quad [\text{或} \prod_n \rho(P_n, P'_n) = 0]. \tag{1.25}$$

2. 我們有

$$\rho(P, P') = \prod_n \rho(P_n, P'_n).$$

【證明】 分兩種情形討論

(a) $\Pi_n \rho(P_n, P_n') > 0$ 的情形，與

(b) $\Pi_n \rho(P_n, P_n') = 0$ 的情形。

(a-1) 首先注意到，當P與P'等價時，在ρ的定義中我們可取Q為P。由假設知，對每個n，P_n與P_n'等價，故我們可作出

$$\varphi_n(\omega_n) = \frac{dP_n'}{dP_n}(\omega_n), \qquad \omega_n \in \Omega_n.$$

令p_n為從Ω到Ω_n的投影，由$\varphi_n(\omega_n) = \varphi_n(p_n\omega)$知，$\varphi_n$可看作定義在$\Omega$上的一個函數，我們仍使用相同的記號。因為$P$為乘積測度，故$\{\varphi_n(\omega): n \geq 1\}$為$(\Omega, \mathbf{B}, P)$上的一列獨立隨機變數。令

$$\psi_k(\omega) = \prod_1^k \{\varphi_j(\omega)\}^{1/2}.$$

回想一下，我們有$\psi_k^2 = d(\Pi_1^k P_j')/d(\Pi_1^k P_j)$，故對任意$k \geq 1$

$$\psi_k \in L^2(\Omega, \mathbf{B}, P), \quad 或 \quad \|\psi_k\| = 1.$$

復次，對$k < l$，由$\{\varphi_j\}$的獨立性得

$$\begin{aligned}\|\psi_k - \psi_l\|^2 &= 2\left\{1 - \prod_{k+1}^{l} \int_{\Omega_j} \sqrt{\varphi_j(\omega_j)}\, dP_j(\omega_j)\right\} \\ &= 2\left\{1 - \prod_{k+1}^{l} \rho(P_j, P_j')\right\}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

今利用假設$\Pi_n \rho(P_n, P_n') > 0$，可知當$l \to \infty$時，(1.26)式的右邊趨近於0，亦即$\{\psi_k\}$為$L^2(\Omega, \mathbf{B}, P)$中的Canchy序列，這保證存在均方極限$\bar{\psi}$，即

$$\lim_{k \to \infty} \psi_k = \bar{\psi}. \tag{1.27}$$

(a-2) 今證明P與P'等價，且$dP'/dP = \bar{\psi}^2$。令$B \subset \Omega$為形如$B_k \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times \cdots$的柱集，其中$B_k$為$\Pi_1^k B_j$可測集。回想一下，$\varphi_j(\omega_j)$可寫成$\varphi_j(p_j\omega)(\equiv \varphi_j(\omega))$，故有

$$P'(B)=\int_{B_k} d\left(\prod_1^k P'_j\right)=\int_{B_k}\left[\prod_1^k \varphi_j(\omega_j)\right] d\left(\prod_1^k P_j\right)=\int_B\left[\prod_1^k \varphi_j(\omega)\right] dP(\omega).$$

對於 $l>k$ 的情形，可視 B 爲 $B_k\times\Omega_{k+1}\times\cdots\times\Omega_l\times\Omega_{l+1}\times\cdots$，因此

$$P'(B)=\int_{B_k}\psi_k(\omega)^2\,dP(\omega)=\int_{B_k\times\Omega_{k+1}\times\cdots\times\Omega_l}\psi_l(\omega)^2\,dP(\omega).$$

因爲 $l>k$ 爲任意，故可令 $l\to\infty$，可利用（1.27）式，得到

$$P'(B)=\int_B\bar\psi(\omega)^2\,dP(\omega). \tag{1.28}$$

此式對所有柱集皆成立，故可延拓成對任意 $\mathbf{B}$ 可測集亦成立。從而

$$P'\ll P \quad 且 \quad dP'/dP=\bar\psi^2.$$

因爲 ρ 是對稱的，故也有 $P\ll P'$。這就證明了 P 與 P' 的等價性。

（a-3） 等式 $\rho(P,P')=\Pi_1^\infty\rho(P_n,P'_n)$ 由下面的計算可得：

$$\rho(P,P')=\int_\Omega\bar\psi(\omega)\,dP(\omega)=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\psi_n(\omega)\cdot 1\,dP(\omega)$$

（因爲 ψ_n 的強收斂⇒弱收斂）

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_n}\prod_1^n\sqrt{\varphi_j(\omega_j)}\,d\left(\prod_1^n P_j\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_1^n\rho(P_j,P'_j).$$

(b) 假設 $\Pi_1^\infty\rho(P_n,P'_n)=0$。由此可知，對任意 $\varepsilon>0$，存在一個自然數 $k=k(\varepsilon)$ 使得

$$\prod_1^k\rho(P_j,P'_j)<\varepsilon.$$

如果令 $B_k=\{(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k):\Pi_1^k\varphi_j(\omega_j)\geq 1\}$，則得

$$\left(\prod_1^k P_j\right)(B_k) = \int_{B_k} 1\, d\left(\prod_1^k P_j\right) \leq \int_{B_k} \left[\prod_1^k \sqrt{\varphi_j(\omega_j)}\right] d\left(\prod_1^k P_j\right)$$
$$\leq \prod_1^k \rho(P_j, P'_j) < \varepsilon.$$

復次，我們有

$$\left(\prod_1^k P'_j\right)\left(\prod_1^k \Omega_j \backslash B_k\right)$$
$$= \int_{\prod_1^k \Omega_j \backslash B_k} \left[\prod_1^k \varphi_j(\omega_j)\right] d\left(\prod_1^k P_j\right)$$
$$\leq \int_{\prod_1^k \Omega_j \backslash B_k} \left[\prod_1^k \sqrt{\varphi_j(\omega_j)}\right] d\left(\prod_1^k P_j\right)$$，因爲在 B_k 之外面有 $\prod_1^k \varphi_j(\omega_j) < 1$
$$\leq \prod_1^k \rho(P_j, P'_j) < \varepsilon.$$

因此我們已證明：對任意 $\varepsilon > 0$，存在一個柱集 $B_\varepsilon = B_k \times \Omega_{k+1} \times \cdots$ 使得 $P(B_\varepsilon) < \varepsilon$，且 $P'(B_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$。因此 P 與 P' 是奇異的。

反過來，條件（1.25）式的必要性是顯然的，因此定理證明完畢。

【註記】 我們已看到，兩個無窮乘積測度要不然等價，要不然奇異，絕不允許中間路線。這種二分性是無窮乘積測度所獨有的特點。

【例子】 將上述定理應用到獨立的隨機變數所成的序列（即具有離散參數的隨機過程）$\{X_n : n \geq 1\}$。假設每個 X_n 皆具有 Gauss 型分佈。

1. 第一個論題是有關 $\{X_n, n \geq 1\}$ 與 $\{c_n X_n, n \geq 1\}$ 的分佈之比較定理，其中 $\{c_n\}$ 爲一數列。

取 $\Omega_n = \mathbf{R}$，$\forall n$，並且假設 X_n 的分佈 P_n 爲 Gauss 型，具有平均值爲 0，方差爲 $\sigma_n^2 > 0$。因此 $c_n X_n$ 的分佈 P'_n 也是 Gauss 型，具有平均值爲 0，方差爲 $c_n^2 \sigma_n^2$。因爲

$$\frac{dP'_n}{dP_n} = |c_n|^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2} x^2 (c_n^{-2} \sigma_n^{-2} - \sigma_n^{-2})\right],$$

故我們有

$$\rho(P_n, P'_n) = (2\pi)^{-1/2}\sigma_n^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{dP'_n}{dP_n}(x)\right\}^{1/2}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right]dx$$

$$= (2\pi|c_n|)^{-1/2}\sigma_n^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{x^2(c_n^{-2}+1)}{4\sigma_n^2}\right]dx$$

$$= \left\{\frac{2|c_n|}{1+c_n^2}\right\}^{1/2}$$

又因爲$P=\Pi_n P_n$，$P'=\Pi_n P'_n$，故有下面等價性的斷言：

$$P \sim P'\text{（等價）} \Leftrightarrow \prod_n\left\{\frac{2|c_n|}{1+c_n^2}\right\}^{1/2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_n\left[\frac{(1-c_n^2)^2}{(1+c_n^2)^2}\right] < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_n(1-|c_n|)^2 < \infty.$$

如果級數$\Sigma_n(1-|c_n|)^2$發散，則當然P與P'互爲奇異。

2. 其次考慮平移，即比較$\{X_n+m_n: n\geq 1\}$與$\{X_n: n\geq 1\}$的分佈，其中$\{m_n\}$爲一數列。

令P_n爲Gauss型分佈，平均值爲0，方差爲$\sigma_n^2>0$；而且P'_n也是Gauss型分佈，平均值爲m_n，方差爲σ_n^2，它們分別是X_n與X_n+m_n的分佈。我們容易推得

$$\frac{dP'_n}{dP_n} = \exp\left[\frac{2m_n x - m_n^2}{2\sigma_n^2}\right],$$

從而

$$\rho(P_n, P'_n) = (2\pi)^{-1/2}\sigma_n^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{2m_n x - m_n^2}{4\sigma_n^2} - \frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right]dx$$

$$= \exp\left[-\frac{m_n^2}{8\sigma_n^2}\right].$$

由此我們可證明

$$P \sim P' \Leftrightarrow \sum_n \frac{m_n^2}{\sigma_n^2} < \infty.$$

【註記】 當 $\sigma_n = 1$ ，$\forall_n$ ，則P為具離散參數的白噪聲之分佈（見第3.4節）。上述結果告訴我們，對空間作一個無窮維向量（m_n）之平移，仍保持分佈的絕對連續性之充要條件爲

$$(m_n) \in l^2.$$

1.4 條件期望

設（Ω，B，P）爲一機率空間，C爲B的子σ體。令P_0表示P局限到C的機率測度，並且在（Ω，B，P）上已給定一個非負的B可測函數$X(\omega)$。

【命題 1.2】

設C與$X(\omega)$如上述，則唯一存在一個函數$Y(\omega)$滿足下面兩個條件:

1. $Y(\omega)$爲C可測且$0 \leq Y(\omega) \leq \infty$，$a.e.\ P_0$，
2. 對於任意$C \in$ C，我們有

$$\int_C Y(\omega)\, dP(\omega) = \int_C X(\omega)\, dP(\omega).$$

特別地，如果X的期望值爲有窮，則$0 \leq Y(\omega) < \infty$，$a.e.\ P_0$。

【證明】 在可測空間（Ω，C）上定義集函數Q爲

$$Q(C) = \int_C X(\omega)\, dP(\omega), \qquad C \in \mathrm{C}.$$

則（Ω，C，Q）變成一個測度空間，雖然Q不必是一個有窮測度。顯然由定義可知$Q \ll P_0$，故由Radon-Nikodym定理得知，存在一個C可測的密度函數$Y(\omega) = dQ/dP_0$使得

$$Q(C)=\int_C Y(\omega)\,dP_C=\int_C X(\omega)\,dP(\omega). \tag{1.29}$$

這個函數$Y(\omega)$就是我們要找尋的。唯一性證明如下：取$Y'(\omega)$爲滿足上面(1)與(2)的另一個函數，再任取$C\in \mathbf{C}$，則我們有

$$\int_C Y(\omega)\,dP_C(\omega)=\int_C Y'(\omega)\,dP_C(\omega)\left[=\int_C X(\omega)\,dP(\omega)\right]$$

由此可得$Y(\omega)=Y'(\omega)$，$a.e.\ P_{\mathbf{C}}$。

如果$X(\omega)$的期望值爲有窮，則Q爲有窮測度。由此事實立即得到定理中最後斷言。

【註記】 此地$Y(\omega)$的唯一性，是指它可被唯一決定到差個$P_{\mathbf{C}}$的零測集而言的。

【定義 1.4】

在命題1.2中的函數$Y(\omega)$，稱爲$X(\omega)$關於$\mathbf{C}$的**條件期望**（或給定$\mathbf{C}$時X的條件期望），記爲$E(X|\mathbf{C})(\omega)$，或簡記爲$E(X|\mathbf{C})$。當$\mathbf{C}=\mathbf{B}(Z)$時，X關於$\mathbf{C}$的條件期望通常寫成$E(X|Z)$。

對於一般不必爲正的隨機變數$X(\omega)$，要考慮其條件期望，對X必須再加一個條件：X的期望值爲有窮。此時可以將$X(\omega)$分解成正部$X^+(\omega)$與負部$X^-(\omega)$：

$$X(\omega)=X^+(\omega)-X^-(\omega),\qquad X^+(\omega),\ X^-(\omega)\geq 0,$$

並且兩部分的期望值都是有窮的。因此分別可得到X^+與X^-關於$\mathbf{C}$的條件期望$E(X^+|\mathbf{C})$與$E(X^-|\mathbf{C})$。我們定義X關於$\mathbf{C}$的條件期望爲

$$E(X|\mathbf{C})=E(X^+|\mathbf{C})-E(X^-|\mathbf{C}).$$

我們稱$E(\cdot|\mathbf{C})$爲條件期望算子。

【命題 1.3】

假設下面所牽涉到的隨機變數的期望值都是有窮的，則條件期望算子滿足下面性質：

1. 對所有常數 a，b

$$E(aX_1 + bX_2|\mathbf{C}) = aE(X_1|\mathbf{C}) + bE(X_2|\mathbf{C}). \tag{1.30}$$

2. 設 $X_n(\omega) \geq 0$ 且 $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$，$n = 1, 2, \cdots$。若極限

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

存在 $a.e.P$，則

$$E(X_n|\mathbf{C}) \leq E(X_{n+1}|\mathbf{C}) \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

並且 $a.e.P$ 我們有

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathbf{C}) = E(X|\mathbf{C}). \tag{1.31}$$

3. 對於 $\mathbf{C}_2 \supseteq \mathbf{C}_1$，我們有

$$E(E(X|\mathbf{C}_2)|\mathbf{C}_1) = E(X|\mathbf{C}_1). \tag{1.32}$$

特別地，對任意子 σ 體 $\mathbf{C}$，我們有

$$E(E(X|\mathbf{C})) = E(X).$$

4. 若 $X(\omega)$ 獨立於 $\mathbf{C}$，則 $a.e.P$。我們有

$$E(X|\mathbf{C}) = E(X). \tag{1.33}$$

5. 對任意有界的且 $\mathbf{C}$ 可測函數 $Z(\omega)$，我們有

$$E(ZX|\mathbf{C}) = ZE(X|\mathbf{C}). \tag{1.34}$$

【略證】 (1)由定義立即可得，(2)由定義與Fatou補題可得。

3. 若$C \in \mathbf{C}_1$則$C \in \mathbf{C}_2$，故

$$\int_C E(E(X|\mathbf{C}_2)|\mathbf{C}_1)\,dP = \int_C E(X|\mathbf{C}_2)\,dP = \int_C X\,dP.$$

最後一個積分跟$E(X|\mathbf{C}_1)$在集合C上的積分相等，並且對所有$C \in \mathbf{C}_1$都成立，故得證（1.32）式。

4. 假設$X(\omega) = 1_A(\omega)$獨立於$\mathbf{C}$，其中$1_A(\omega)$爲集A的示性函數，則對$C \in \mathbf{C}$我們有

$$\int_C E(X|\mathbf{C})\,dP(\omega) = \int_C \chi_A(\omega)\,dP(\omega) = P(A \cap C)$$

$$= P(A)P(C) = \int_C E(X)\,dP(\omega).$$

這證明了（1.33）式的一個特殊情形。爲了證明（1.33）式對一般的X也成立，我們取一列簡單函數來逼近X，然後應用(1)，(2)及上述特殊結果就好了。

至於(5)的證明，也是由$Z(\omega) = 1_B(\omega)$的簡單情形下手。對於任意$C \in \mathbf{C}$，我們有

$$\int_C E(ZX|\mathbf{C})\,dP(\omega) = \int_C \chi_B(\omega)X(\omega)\,dP(\omega) = \int_{B \cap C} X(\omega)\,dP(\omega)$$

$$= \int_{B \cap C} E(X|\mathbf{C})\,dP(\omega) = \int_C ZE(X|\mathbf{C})\,dP(\omega).$$

由此得證（1.34）式對此特殊情形成立。對於一般有界且$\mathbf{C}$可測的函數$Z(\omega)$，仿(4)的辦法證明。

【定義 1.5】

當$X(\omega) = 1_B(\omega)$時，$B \in \mathbf{B}$，條件期望$E(X|\mathbf{C})$稱爲B關於$\mathbf{C}$的條件機率（或給定$\mathbf{C}$時B的條件機率），記爲$P(B|\mathbf{C})$。

$P(B|\mathbf{C})$除了是一個$\mathbf{C}$可測函數之外，也可視爲$\mathbf{B}$上的一個具有類似測度性質的集函數。除了可列加性不一定成立之外，其餘的性質都容易由命題 1.3 中所述的一般條件期望推得，因此我們就省略掉詳細情形。

【例1】

回到第1.2節的例2。令$\mathbf{B}_n$爲使隨機變數$S_1(\omega)$，$S_2(\omega)$，…，$S_n(\omega)$皆爲可測之最小σ體。容易看出，$\mathbf{B}_n$是由[0，1]中形如$C_k=[k2^{-n},(k+1)2^{-n}]$，$0\leq k\leq 2^n$，的子區間所生成的。所以由隨機變數$X_1(\omega)$，$X_2(\omega)$，…，$X_n(\omega)$所生成的$\sigma$體跟$\mathbf{B}_n$一致。今計算條件期望$E$ $E(S_{n+1}|\mathbf{B}_n)$。由於S_n在C_k上取值爲常數，如圖2所示，而S_{n+1}在C_k的左半區間上等於S_{n-1}，故由定義得

$$\int_{C_k} E(S_{n+1}|\mathbf{B}_n)\,dP(\omega)=\int_{C_k} S_{n+1}(\omega)\,dP(\omega)$$

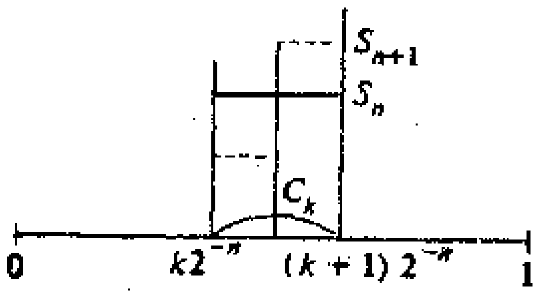


圖2

根據上面的一個觀察，右側的積分等於S_n在C_k上的取值乘以C_k的長度。另一方面，由於$E(S_{n+1}|\mathbf{B}_n)$爲$\mathbf{B}_n$可測，故$E(S_{n+1}|\mathbf{B}_n)$在C_k上取常數值，於是在C_k上我們必有

$$E(S_{n+1}|\mathbf{B}_n)=S_n, \qquad \text{a.e.} \tag{1.35}$$

又因爲C_k爲$\mathbf{B}_n$的任意事件且(1.35)式兩側的函數皆爲$\mathbf{B}_n$可測，故(1.35)式成立於整個空間[0，1]上。

【註記】 設$\{X_n: n\geq 1\}$爲任意隨機過程，滿足$E(|X_n|)<\infty$，$\forall n\geq 1$。令B_n爲使X_1，X_2，…，X_n皆爲可測之最小σ體。如果

$$E(X_{n+1}|\mathbf{B}_n)=X_n \quad, \forall n$$

則稱$\{X_n, \mathbf{B}_n\}$爲一個平賭過程(martingale)。進一步的詳細情形，

請參見第A.1 。例1中所定義的過程 $\{S_n, \mathbf{B}_n\}$ 就是一個平賭過程。由於 $\{S_n\}$ 可看作是丟一個公正的、無記憶的銅板之數學模型，所以平賭過程可以看作是某種"公平"賭博的模型。

【例2】

設 $X(\omega)$ 與 $Y(\omega)$ 爲機率空間 $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 上的離散型隨機過程，分別取值 x_j 與 y_k，$k=1, 2, \cdots$。令

$$A_j = \{\omega: X(\omega) = x_j\}, \qquad P(A_j) = p_j,$$
$$B_{j,k} = \{\omega: X(\omega) = x_j, Y(\omega) = y_k\}, \qquad P(B_{j,k}) = q_{j,k}.$$

再設 $\mathbf{C}$ 爲由 A_j，$j \geq 1$，所生成的 σ 體，且期望值 $E(Y)$ 存在。我們要求算 $E(Y \mid \mathbf{C})$，並且用明白的公式表出來。由定義得

$$\int_{A_j} E(Y \mid \mathbf{C})\, dP(\omega) = \int_{A_j} Y\, dP(\omega) = \sum_k y_k q_{j,k}.$$

但是 $E(Y \mid \mathbf{C})$ 爲 $\mathbf{C}$ 可測，故在 A_j 上取常數值。於是，若 $p_j = P(A_j) > 0$，則有

$$E(Y \mid \mathbf{C}) = \frac{\sum_k y_k q_{j,k}}{p_j}, \qquad \omega \in A_j.$$

如果 $p_j = 0$ 則也有 $q_{j,k} = 0$，$\forall k$。這種情形，在 A_j 上可定義 $E(Y \mid \mathbf{C})$ 爲 0。

下面講另一個論題。先回想一下，對於給定的機率空間 $(\Omega, \mathbf{B}, P)$，我們可以作出一個實的Hilbert空間 $L^2(\Omega, \mathbf{B}, P)$。這個空間可看作是 Ω 上的實值且具有有限方差的隨機過程全體所組成。隨機過程 X 與常函數1的內積就是 X 的期望值，而 X 的範數之平方就是 X 的二級矩。

令 $\mathbf{C}$ 爲 σ 體 $\mathbf{B}$ 的一個子 σ 體，並且包含 $\mathbf{B}$ 的所有 P 零測集。

【命題1.4】

$E(\cdot \mid \mathbf{C})$ 爲從 $L^2(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 到 $L^2(\Omega, \mathbf{C}, P)$ 的正交射影算子(orthogonal projection operator)。

【證明】 取X爲$L^2(\Omega, \mathbf{B}, P)$之任意元素。對每個$Y \in L^2(\Omega, \mathbf{C}, P)$，我們有

$$E\{[X - E(X|\mathbf{C})]Y\} = E(XY) - E\{YE(X|\mathbf{C})\}$$
$$= E(XY) - E\{E(XY|\mathbf{C})\} = 0,$$

亦即$X - E(X|\mathbf{C})$正交於$L^2(\Omega, \mathbf{C}, P)$。另一方面，可看出$E(X|\mathbf{C})$屬於$L^2(\Omega, \mathbf{C}, P)$。利用這些事實，加上(1.30)，(1.32)及(1.34)等式，就證明了映射$X \to E(X|\mathbf{C})$爲線性的、冪等的(idempotent)與自伴的算子。

下面的推論，直接由條件期望爲正交射影的事實可推得。我們假設所有的子σ體皆包含$\mathbf{B}$的P零測集。

【推論】 設$\{\mathbf{B}_n, n \geq 1\}$爲$\mathbf{B}$的一族遞增子$\sigma$體，其極限爲$\mathbf{B}_\infty$，亦即

$$\mathbf{B}_n \to \mathbf{B}_\infty \quad 當 \quad n \to \infty. \tag{1.36}$$

然則，對每個隨機變數$X \in L^2(\Omega, \mathbf{B}, P)$，我們有(均方意味)

$$\lim_{n \to \infty} E(X|\mathbf{B}_n) = E(X|\mathbf{B}_\infty).$$

這個結果由下面事實可推得：$\{\mathbf{B}_n\}$所相應的Hilbert子空間$L^2(\Omega, \mathbf{B}_n, P)$列也是遞增的，而且其極限爲$L^2(\Omega, \mathbf{B}_\infty, P)$。

1-5 極限定理

現在來探討機率論中極限定理的一些論題。跟往常一樣，假設有一個機率空間$(\Omega, \mathbf{B}, P)$，在其上定義有我們所要討論的隨機過程$X(\omega)$，$X_n(\omega)$，…等等。如果沒有混淆可能時，我們就將隨機變數中的參數ω略去不寫。

[1] 大數法則

下面三個補題都是週知的：

【補題 1.1】 （Borel-Cantelli 補題）

設 $\{A_n\}$ 爲一列事件。

1. 若 $\Sigma_n P(A_n) < \infty$，則

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right) = 0, \qquad \left[P\left(\lim_{n\to\infty} \inf A_n^c\right) = 1\right].$$

2. 若 $\Sigma_n P(A_n) = \infty$，並且序列 $\{A_n\}$ 是獨立的，則

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right) = 1, \qquad \left[P\left(\lim_{n\to\infty} \inf A_n^c\right) = 0\right].$$

【補題 1.2】 （Tchebychev 不等式）

假設 X 爲一隨機變數，具有有窮方差 $V(X)$。然則下面不等式成立：

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}, \qquad t > 0. \tag{1.37}$$

【補題 1.3】 （Kolmogorov 不等式）

假設 $\{X_n\}$ 爲一列獨立的隨機變數，且每個 X_n 都具有有窮方差，令 $S_n = \Sigma_1^n X_k$，則下面不等式成立：

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k - E(S_k)| \geq t\right) \leq \frac{V(S_n)}{t^2}, \qquad t > 0. \tag{1.38}$$

下一命題所述的內容就是弱大數法則，由補題 1.2 立即可證得。

【命題 1.5】

設 $\{X_k\}$ 爲一列獨立的隨機變數，$E(X_k) = m_k$ 且 $V(X_k) \leq V$，$k \geq 1$。然則對任意 $\varepsilon > 0$，我們有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|n^{-1} \sum_1^n (X_k - m_k)\right| > \varepsilon\right) = 0. \tag{1.39}$$

其次，我們有下面的強大數法則：

【定理 1.7】

設 $\{X_k\}$ 爲一列獨立的隨機變數，$E(X_k)=m_k$ 且 $V(X_k)\leq V$，$k\geq 1$。然則我們有

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{1}^{n}(X_k-m_k)=0 \qquad \text{a.e. (殆遍)} \tag{1.40}$$

【證明】 不妨假設 $E(X_k)=0$，$\forall_k$，因爲用 X_k-m_k 取代 X_k 就好了。如果令

$$M_n(\omega)=\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{j=1}^{k}X_j(\omega)\right|,$$

則由補題 1.3 得

$$P(M_{8^k}\geq 4^k)\leq \frac{8^k V}{4^{2k}}=2^{-k}V.$$

令 $A_k=\{8^{-k}M_{8^k}\geq 2^{-k}\}$。因爲 $\Sigma_k P(A_k)\leq \Sigma_k 2^{-k}V<\infty$，故由Borel-Cantelli 補題得知

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)=0.$$

但這表示，對殆遍的 ω，存在一個自然數 $N=N(\omega)$，使得 $8^{-k}M_{8^k}(\omega)<2^{-k}$，$\forall_k>N$。因此

$$\lim_{k\to\infty} 8^{-k}M_{8^k}(\omega)=0, \qquad \text{a.e.}$$

對於一般的 n，我們取 $k=k(n)$ 使得 $8^{k-1}\leq n\leq 8^k$，並且對這種 k，我們觀察到

$$0\leq n^{-1}|S_n(\omega)|\leq 8^{-(k-1)}M_{8^k}(\omega),$$

當 $n\to\infty$ 時，這殆遍收斂到 0。

【推論】 設$\{X_k\}$爲一列獨立的且具有相同分佈（簡記爲i.i.d.)的隨機變數，令其共同的平均值爲$m=E(X_k)$。再設每個X_k具有有窮方差。然則，我們有

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}S_n = m \qquad \text{a.c.} \tag{1.41}$$

[2] 中央極限定理（central limit theorem）

由名字就知道這個定理在機率論中佔有核心的地位。透過它我們看出Gauss 型分佈的重要性，因爲Gauss 型分佈是作爲極限分佈來出現的。這個定理有各式各樣的推廣，此地我們僅限於討論典型的與容易的情形，並且只牽涉到一維隨機變數。

設$\{X_n\}$爲一列獨立的隨機變數。我們要假設：除了每個X_k具有有窮期望值與方差外，也具有相對於平均值的有窮三級矩$c_k=E\{|X_k-m_k|^3\}$。令$A_n=\Sigma_1^n m_k$，$B_n=\Sigma_1^n V_k$，$C_n=\Sigma_1^n c_k$，並且記$S_n=\Sigma_1^n X_k$。

【定理 1.8】

當$n\to\infty$時，如果$B_n\to\infty$，$B_n^{-1}(\max_{1\le k\le n} V_k)\to 0$且$C_n^2/B_n^3\to 0$，則當$n\to\infty$時，$Y_n=B_n^{-1/2}(S_n-A_n)$的分佈收斂到標準Gauss型分佈。

【證明】 我們要證明Y_n的特徵函數$\varphi_n(z)$逐點（這就充分了）收斂到標準Gauss 型分佈的特徵函數$\exp(-½ z^2)$。爲此，引進記號$Y_{n,k}=B_n^{-1/2}(X_k-m_k)$，並且觀察到$E(Y_{n,k})=0$，$E(Y_{n,k}^2)=B_n^{-1}V_k$。復次

$$E\{\exp[izY_{n,k}]\} = 1-\tfrac{1}{2}z^2B_n^{-1}V_k+\tfrac{1}{6}z^3(B_n^{-3/2}c_k)\theta_{n,k},$$

其中$|\theta_{n,k}|\le 1$。上式右項記爲$1+\alpha_{n,k}(z)$，由假設得知當$n\to\infty$時，

$$\max_{1\le k\le n}|\alpha_{n,k}(z)| \le \tfrac{1}{2}z^2B_n^{-1}\left(\max_{1\le k\le n} V_k\right)+\tfrac{1}{6}|z|^3B_n^{-3/2}C_n\to 0,$$

同時，我們有

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{n,k}(z)|^2 \le \left\{\max_{1\le k\le n} |\alpha_{n,k}(z)|\right\} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{n,k}(z)|$$
$$\le \left\{\max_{1\le k\le n} |\alpha_{n,k}(z)|\right\} [\tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}(B_n^{-3/2}C_n)|z|^3] \to 0,$$

以及

$$\sum_{1}^{n} \alpha_{n,k}(z) = -\tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}\theta_n(B_n^{-3/2}C_n)z^3 \to -\tfrac{1}{2}z^2,$$

因爲 $|\theta_n| \le 1$ 。然而，$Y_n = \Sigma_{k=1}^{n} Y_{n,k}$ 爲獨立隨機變數之和，故有

$$\varphi_n(z) = \prod_k E\{\exp[izY_{n,k}]\} = \prod_k (1 + \alpha_{n,k}(z)).$$

利用上述有關 $\alpha_{n,k}$ 的一些結果，最後得到

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \exp[-\tfrac{1}{2}z^2].$$

【註記】 事實上可以由" $B_n^{-3}C_n^2 \to 0$ ，當 $n \to \infty$ "推得假設條件" $B_n^{-1}(\max_{1\le k\le n} V_k) \to 0$ ，當 $n \to \infty$ "。

現在我們列出一些使中央極限定理成立的充分條件：

(a) 如果 $\{X_k\}$ 爲一列 $i.i.d.$ 隨機變數，則每個 X_k 具有三級矩是一個充分條件。

(b) 令 V_k 爲 X_k 的方差，$Y_k = X_k - E(X_k)$ 。另一個充分條件是：對每個 $t > 0$ ，當 $n \to \infty$ 時，

$$\left(\sum_{1}^{n} V_k\right)^{-1} \sum_{1}^{n} \int_{\{|Y_k|^2 > t\sum_1^n V_k\}} Y_k^2(\omega)\, dP(\omega) \to 0$$

(c) 假設 $\{X_k\}$ 爲均勻有界，即存在一常數 K 使得當 $k \ge 1$ 時，恒有

$$|X_k(\omega)| \le K, \qquad \text{a.e.}$$

對這種情形，$B_n \to \infty$ 爲一個充分條件。

最後兩個充分條件有一個特殊情形，那就是有關二項分佈的著名的 De Moivre-Laplace 定理，請參看 Feller（1968）第VII章。

現在我們已經很清楚，中央極限定理保證：對適當的一列隨機變數作標準化（normalized），其分佈就會收斂到Gauss型分佈。這個事實使得Gauss型分佈在所有機率分佈中"鶴立雞群"，同時也使我們深信Gauss型隨機變數及Gauss型分佈確實很重要。

[3] 隨機變數所成序列的收斂

考慮一列隨機變數 $\{X_n(\omega)\}$ 以及級數 $\Sigma_n X_n(\omega)$。我們要探討它們的種種收斂問題。在本小段中，我們不假設 $\{X_n\}$ 的獨立性。

(a) 如果 X_n 的分佈收斂到 X 的分佈（按第1.3節的意味，即弱收斂），則稱 X_n 按法則（in law）收斂到 X。

(b) 如果對於殆遍 ω，$X_n(\omega)$ 收斂到 $X(\omega)$，則稱 X_n 殆遍收斂到 X 或 X_n 按機率1收斂到 X。在強大數法則中，我們已看過這種意味的收斂。

(c) 如果對任意 $\varepsilon>0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0. \tag{1.42}$$

則稱 X_n 按機率收斂到 X。

(d) 假設 X_n 與 X 對任意 $p\geq 1$ 都具有有窮的 p 級矩。如果

$$\lim_{n\to 0} \int |X_n(\omega) - X(\omega)|^p \, dP(\omega) = 0. \tag{1.43}$$

則稱 X_n 按 L^p 意味收斂到 X。特別地，對於 $p=2$ 的情形，我們稱 X_n 按均方（in mean square）收斂到 X。

上述(a)，(b)，(c)，(d)四種意味的收斂，不但適用於序列 $\{X_n\}$，也適用於級數 $\Sigma_n X_n$ 的情形。對於級數的情形，我們還是使用相同的收斂術語。

我們剛才所介紹的概念，其實都是測度論中的特殊情形（具有全測度爲1的情形）。下面有關序列或級數的收斂性質，都是測度論中已知結果的推論：

(a) 殆遍收斂⇒按機率收斂⇒按法則收斂

(b) L^q 收斂⇒L^p 收斂，若 $q>p\geq 1$；⇒存在殆遍收斂子序列；

(c) L^p 收斂⇒按機率收斂。

下一個斷言，由Borel-Cantelli補題馬上可以推得：

【命題 1.6】

如果存在數列 $\varepsilon_n > 0$ 與 $\eta_n > 0$ 使得 $\Sigma_n \varepsilon_n$ 與 $\Sigma_n \eta_n$ 皆收斂，並且對所有 $n \geq 1$，恒有

$$P(|X_n| > \eta_n) < \varepsilon_n,$$

則 $\Sigma_n X_n$ 殆遍收斂。

注意到，一般而言，上述(a)中的兩個斷言，其逆都不成立。但是我們可以證明一個較弱的結果。

【命題 1.7】

若 $\{X_n\}$ 按機率收斂到 X，則存在 $\{X_n\}$ 的一個子序列殆遍收斂到 X。

【略證】 由假設條件知，可選取到 $\{n_k\}$ 與 $\varepsilon_k > 0$，使得 $\Sigma_k \varepsilon_k < \infty$ 及

$$P(|X_{n(k)} - X| > \varepsilon_k) < \varepsilon_k.$$

再由命題 1.6 知，$\{X_{n_k}\}$ 殆遍收斂到 X。

【命題 1.8】

假設對任意 $\varepsilon > 0$，當 m，$n \to \infty$ 時，我們有

$$P\left(\max_{n \leq k \leq m} |X_n - X_k| > \varepsilon\right) \to 0$$

則 $\{X_n\}$ 爲遍收斂。

【略證】 對任意 $\varepsilon > 0$，可選取到 N 使得

$$P\left(\max_{n \leq k, l \leq m} |X_k - X_l| > 2\varepsilon\right) < \varepsilon, \ \forall m, \ n \geq N, \ m > n$$

令 $m \to \infty$ 得

$$P\left(\sup_{k,\,l\geq n}|X_k-X_l|>2\varepsilon\right)\leq\varepsilon,$$

再令 $n\to\infty$ 得

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{k,\,l\geq n}|X_k-X_l|>2\varepsilon\right)\leq\varepsilon.$$

此式跟 N 無關，故可令 $\varepsilon\to 0$ 得

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{k,\,l\geq n}|X_k-X_l|>0\right)=0,$$

從而對殆遍的 ω，$\lim_n X_n(\omega)$ 皆存在。

【命題 1.9】

$\{X_n\}$ 按機率收斂的充要條件是：對任意 $\varepsilon>0$，當 m，$n\to\infty$ 時，恒有

$$P(|X_m-X_n|>\varepsilon)\to 0$$

【略證】　只證充分條件。由假設知，可找到一個數列 $\{n(k)\}$ 使得

$$P(|X_{n(k+1)}-X_{n(k)}|>2^{-k})<2^{-k},$$

故由命題 1.6 知，級數 $\Sigma_k(X_{n(k+1)}-X_{n(k)})$ 殆遍收斂。於是對殆遍的 ω，$\lim_{k\to\infty}X_k(\omega)=X(\omega)$ 存在。再由假設知，對任意 $\varepsilon>0$，可找到 N，使得

$$P(|X_m-X_n|>\varepsilon)<\varepsilon,\ \forall m,\ n\geq N$$

把這些結果合起來就得到

$$P(|X_n-X|>\varepsilon)=P\left(\lim_{k\to\infty}|X_n-X_{n(k)}|>\varepsilon\right)$$

$$\leq\liminf_{k\to\infty}P(|X_n-X_{n(k)}|>\varepsilon)\leq\varepsilon,$$

因此，X_n 按機率收斂到 X，明所欲證。

〔4〕 獨立隨機變數的和

當 $\{X_n\}$ 爲一獨立序列時，級數 $\Sigma_n X_n$ 的收斂會有很耀眼的性質，其中之一就是P. Léry 的結果。爲了要說明他的定理，我們需要兩個補題。令 $\mathbf{B}^n = \mathbf{B}(X_k; k \geq n)$。

【補題 1.4】 （Kolmogorov 的 0-1 律）

如果對於所有 $n \geq 1$，事件 A 屬於 $\mathbf{B}^n$，則 $P(A) = 0$ 或 1。

一個事件若滿足上述補題的條件，就叫做尾事件（tail event）。

【例子】 假設 $\{X_n\}$ 爲一獨立序列，則集 $\{\omega; \Sigma_n X_n(\omega)$ 收斂$\}$ 與集 $\{\omega; \lim_n X_n(\omega) = a, a \in \mathbf{R}\}$ 都是尾事件，從而它們的機率爲 0 或 1。

仍然繼續假設 $\{X_n\}$ 爲一獨立序列，並且令 $S_n = \Sigma_1^n X_k$。

【補題 1.5】 （Ottaviani 不等式）

如果對於每個 $k \leq n$，恒有

$$P(|S_n - S_k| > c) \leq \frac{1}{2},$$

其中 $c > 0$，則

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > 2c\right) \leq 2P(|S_n| > c). \tag{1.44}$$

【定理 1.9】

（Lévy，Doob），假設 $\{X_n\}$ 爲一列獨立的隨機變數，則級數 $\Sigma_n X_n$ 的殆遍收斂，按機率收斂及按法則收斂都是等價的。

【略證】 回想一下，在命題 1.6 之前的(a)、(b)與(c)之斷言，顯然只要證明：

(a) 如果 $\Sigma_n X_n$ 按法則收斂，則 $\Sigma_n X_n$ 按機率收斂。

(b) 如果 $\Sigma_n X_n$ 按機率收斂，則 $\Sigma_n X_n$ 按殆遍收斂。

(a)之證明： 設 $\varphi_n(z)$ 爲 X_n 的特徵函數，令

$$\Phi_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(z) \quad 且 \quad \Phi_{n,m}(z)=\prod_{k=n+1}^{m}\varphi_k(z), \qquad m>n.$$

由假設知，下面的極限存在

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(z)=\Phi(z) \ （逐點收斂） \tag{1.45}$$

並且 $\Phi(z)$ 也是一個特徵函數，今對於 $m>n$，我們有 $\Phi_n(z)\Phi_{n,m}(z)=\Phi_m(z)$；並且因爲由 $\Phi(0)=1$，可得知在 $z=0$ 的某近旁 $\Phi(z)\neq 0$，因此由（1.45）可得在此近旁上

$$\Phi_{n,m}(z)\to 1 \quad 當 \quad n,m\to\infty, \tag{1.46}$$

再證（1.46）式對於遠離 0 的點 z 亦成立，這由下面不等式就可得證：

$$|\Phi_{n,m}(z)-1|\leq N\{2|\Phi_{n,m}(N^{-1}z)-1|\}^{\cdot}$$

對足夠大的 N 皆成立。

今假設 $\Sigma_n X_n$ 不按機率收斂，則可找到 $\varepsilon>0$，$\{n(k)\}$ 及 $\{m(k)\}$，具有 $n(k)<m(k)<n(k+1)$，$\forall n$，使得

$$P(|S_{m(k)}-S_{n(k)}|>\varepsilon)\geq\varepsilon\ ,\ \forall\varepsilon \tag{1.47}$$

顯然（1.47）與（1.46）互相抵觸，因此 $\Sigma_n X_n$ 必按機率收斂。

(b)之證明： 由假設知，當 m，$n\to\infty$ 時，$P(|S_m-S_n|>\varepsilon)\to 0$。於是對足夠大的 m，n，我們有

$$P(|S_m-S_n|>\varepsilon)\leq\frac{1}{2}.$$

對隨機變數 X_{n+1}，X_{n+2}，…，X_m 使用補題 1.5，得知當 m，$n\to\infty$ 時，

$$P\left(\max_{n\leq k\leq m}|S_k-S_n|>2\varepsilon\right)\leq 2P(|S_m-S_n|>\varepsilon)\to 0$$

故由命題 1.8 知，$\Sigma_n X_n$ 殆遍收斂。

【推論】 設 $\{X_n\}$ 爲一獨立的序列，並且 $V(X_n)<\infty$，$\forall n\geq 1$。如果 $\Sigma_n E(X_n)$ 與 $\Sigma_n V(X_n)$ 皆收斂，則 $\Sigma_n X_n$ 殆遍收斂。

【例子】 設 $\{X_n\}$ 爲一獨立的序列，並且 $P(X_n=1)=P(X_n=-1)=$ ½，$\forall n$，則由上面的推論得知，$\Sigma_n n^{-1}X_n$ 殆遍收斂。

1-6 Gauss 型的系統

一個定義在機率空間上的實值隨機變數 X，如果它的分佈函數 $F(x)$ 形如

$$F(x)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right]dy \tag{1.48}$$

其中 σ^2 與 m 皆爲常數，則稱 X 爲 Gauss 型或更明確地說 X 具有 Gauss 型的分佈，以 m 爲平均值及 σ^2 爲方差。換個等價方式來說就是，X 具有如下形之特徵函數：

$$E\{\exp[izX]\}=\exp\left\{imz-\frac{1}{2}z^2\sigma^2\right\},\qquad z\in\mathbf{R}. \tag{1.49}$$

【定義 1.6】

設 $\mathbf{X}=\{X_\lambda(\omega);\ \lambda\in\Lambda\}$ 爲由實值隨機變數所成的系統，如果 $\mathbf{X}$ 的任意有窮多個元素 X_λ 作實係數線性組合所成的隨機變數具有 Gauss 型分佈，則稱 $\mathbf{X}$ 爲一個 Gauss 型的系統（Gaussian system），或簡稱爲 Gauss 型。

一個 Gauss 型系統之任意子系統仍然是 Gauss 型。特別地，考慮 Gauss 型系統 $\mathbf{X}$ 的任何有窮子系統 $\{X_j: 1\leq j\leq n\}$，則隨機向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的聯合分佈爲一個多維 Gauss 分佈（multi-dimensional Gaussian distribution）。這個分佈可能遍佈於整個 $\mathbf{R}^n$，也可能只遍佈於一個超平面（至少 $(n-1)$ 維）。下面我們仔細來討論這個分佈。因爲任何線性組合 $\Sigma_{j=1}^{n} z_j X_j$ 具有 Gauss 型分佈，所以 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的特徵

函數必形如

$$E\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{n} z_j X_j\right)\right\} = \exp\left[im(z) - \frac{1}{2}\sigma(z)^2\right], \tag{1.50}$$

其中 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 並且

$$m(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j E(X_j), \qquad \sigma(z)^2 = E\left(\sum_{j=1}^{n} z_j X_j\right)^2 - m(z)^2.$$

令 $m_i = E(X_i)$ 且 $V = (V_{j,k})$ 爲 $\{X_i\}$ 的（正定）協變方陣，其中 $V_{j,k}$ 定義爲

$$V_{j,k} = E\{(X_j - m_j)(X_k - m_k)\}, \qquad 1 \leq j, k \leq n.$$

假設方陣 V 的秩（rank）爲 r ，則（$X_1, X_2, \cdots, X_n$）的分佈集中在 $\mathbf{R}^n$ 的一個 r 維超平面上：

$$m + V\mathbf{R}^n, \qquad m = (m_1, m_2, \ldots, m_n).$$

當 V 非退化時，亦即 $r = n$ 時，則（$X_1, X_2, \cdots, X_n$）的分佈之擔台爲整個 $\mathbf{R}^n$，並且具有密度函數爲

$$(2\pi)^{-n/2}|V|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-m)V^{-1}(x-m)'\right], \tag{1.51}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$，並且 $|V|$ 與 V^{-1} 分別表示 V 的行列式值與逆方陣，而（$x - m$）$'$ 表示（列）向量（$x - m$）經由轉置所得的（行）向量。一個 n 維Gauss 型分佈的密度函數，其一般形式就是（1.51）。這個分佈的特徵函數 $\varphi(z)$ 爲

$$\varphi(z) = \exp\left[i(m, z) - \frac{1}{2}(Vz, z)\right], \qquad z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbf{R}^n, \tag{1.52}$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 爲 $\mathbf{R}^n$ 中的內積構造。

現在回到一般 Gauss 型系統 $\mathbf{X} = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$。對這樣的系統我們

就有

$$\text{平均向量}\quad m_\lambda = E(X_\lambda),\qquad \lambda\in\Lambda;$$

以及

$$\text{協變矩陣}\quad V_{\lambda,\mu} = E\{(X_\lambda - m_\lambda)(X_\mu - m_\mu)\},\quad \lambda,\ \mu\in\Lambda$$

後者為正定，亦即對任意 $n\geq 1$，複數 α_1，α_2，…，$\alpha_n\in\mathbf{C}$，以及 λ_1，λ_2，$\lambda_n\in\Lambda$，恆有

$$\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_j\bar{\alpha}_k V_{\lambda_j,\lambda_k}\geq 0. \tag{1.53}$$

【定理 1.10】

給定（m_λ：$\lambda\in\Lambda$）及一個實正定矩陣 $V=(V_{\lambda,\mu}:\ \lambda,\mu\in\Lambda)$，則存在一個Gauss 型系統 $\mathbf{X}=\{X_\lambda:\ \lambda\in\Lambda\}$，使得 $\mathbf{X}$ 的平均向量及協變矩陣分別為（m_λ）與 $V=(V_{\lambda,\mu})$。如果存在另一個Gauss 型系統 $\mathbf{X}'$ 具有與 $\mathbf{X}$ 相同的平均向量及協變矩陣，則 $\mathbf{X}$ 與 $\mathbf{X}'$ 具有相同的分佈。

【略證】 我們由建構機率空間開始着手，取

$$\Omega = \mathbf{R}^\Lambda = \{\omega = (\omega_\lambda):\ \omega_\lambda\in\mathbf{R},\ \lambda\in\Lambda\}.$$

其次對任意有窮多個指標 λ_j，$j=1$，2，…，n，取一個具有如下特徵函數的Gauss 型分佈：

$$\exp\left[i\sum_{j=1}^{n}m_{\lambda_j}z_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}V_{\lambda_j,\lambda_k}z_jz_k\right],\qquad (z_1,z_2,\ldots,z_n)\in\mathbf{R}^n. \tag{1.54}$$

於是仿照第 1.3 節〔2〕的辦法，就得到 Ω 上的一個機率分佈 $P_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n}$。換言之，我們令 $X_\lambda(\omega)=\omega_\lambda$，且令（$X_{\lambda_1}$，$X_{\lambda_2}$，…，$X_{\lambda_n}$）的分佈是具有特徵函數（1.54）的Gauss 型機率分佈。定義 $\mathbf{B}$ 為 $\mathbf{R}^\Lambda$ 的柱集所產生的 σ 體。考慮機率測度族 $\{P_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}\}$，其中讓（$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_n$）在 Λ 的任何有窮子集中變動，根據Kolmogorov延拓定理（第 1.3 節）知，在（Ω，$\mathbf{B}$）上可定義一個機率測度 P，從而得到我們所要的，定義在

$(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 上的Gauss 型系統 $\mathbf{X} = \{X_\lambda(\omega) : \lambda \in \Lambda\}$ 。

今設 $\mathbf{X}' = \{X'_\lambda(\omega) : \lambda \in \Lambda\}$ 爲另一個Gauss型系統，滿足

$$E(X'_\lambda) = m_\lambda, \quad E\{(X'_\lambda - m_\lambda)(X'_\mu - m_\mu)\} = V_{\lambda,\mu}$$

因爲 $(X'_{\lambda_1}, X'_{\lambda_2}, \cdots, X'_{\lambda_n})$ 的分佈爲Gauss 型，故它由 m_{λ_j}，$j = 1, 2, \cdots, n$ 與 V_{λ_j,λ_k}，$1 \leq j, k \leq n$ 唯一決定，從而必與 $P_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$ 一致。但這表示 $\mathbf{X}'$ 的分佈就是剛才在 $(\Omega, \mathbf{B})$ 上所引進的 P，因此定理中的第二個斷言就證畢。 #

上述所得到 $\mathbf{X}$ 的分佈記爲 $N(m, V)$，其中 $m = (m_\lambda : \lambda \in \Lambda)$，且 $V = (V_{\lambda,\mu} : \lambda, \mu \in \Lambda)$。

令 Λ 爲有窮集，譬如設 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$ 。如果Gauss型隨機變數 X_j，$1 \leq j \leq n$，是獨立的，則 $\mathbf{X} = \{X_j : 1 \leq j \leq n\}$ 顯然爲Gauss 型系統。特別地，若 $m_j = 0$，$1 \leq j \leq n$，且 $V_{j,k} = \delta_{jk}$，$1 \leq j, k \leq n$，則X的分佈爲 $N(0, E)$，其中 E 爲單位方陣。我們稱 $N(0, E)$ 爲 n 維標準Gauss型分佈。

一個Gauss 型系統 $\mathbf{X} = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 具有許多特性，我們只敍述一些比較重要而以後要用到者，並且只給略證。

【命題 1.10 】

設 $\mathbf{X} = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 爲一個Gauss型系統，則

1. $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 爲獨立的充要條件是：對任意 $\lambda \neq \mu$，

$$V_{\lambda,\mu} = 0; \tag{1.55}$$

2. 系統中的一元 X_{λ_0} 獨立於 $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda, \lambda \neq \lambda_0\}$ 的充要條件是：對每個 $\lambda \neq \lambda_0$，

$$V_{\lambda,\lambda_0} = 0. \tag{1.56}$$

【略證】

1. 從 $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 中任取有窮多個元素，譬如說 $X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, \cdots, X_{\lambda_n}$，則它們的聯合分佈爲Gauss 型。將(1.55)式代入(1.54)式，可看

出 $\{X_{\lambda_j}, 1 \le j \le n\}$ 是獨立的，因此 $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 爲一個獨立的系統。反過來則是顯然的。

2. 仿照 1. 的辦法，就可以證明 2。 #

【命題 1.11】

設 $X = \{X_n : n \ge 1\}$ 爲一個 Gauss 系統，則序列 $\{X_n\}$ 的按機率收斂等價於均方意味收斂（簡記爲 $m.s.$ 收斂）。此時序列 $\{X_n\}$ 的極限 X_∞ 也是一個 Gauss 型隨機變數。

【略證】 一般而言，均方收斂必爲按機率收斂，故只需證明反過來的情形。令

$$E(X_j - X_k) = m_{j,k}, \qquad V(X_j - X_k) = \sigma_{j,k}^2.$$

因爲 $\{X_n\}$ 是均方收斂的充要條件，當 $j, k \to \infty$ 時，

$$E\{(X_j - X_k)^2\} = \sigma_{j,k}^2 + m_{j,k}^2 \to 0$$

所以如果 $\{X_n\}$ 不爲均方收斂，則必有

$$\limsup_{j,k\to\infty} (\sigma_{j,k}^2 + m_{j,k}^2) > 0. \tag{1.57}$$

今因

$$P(|X_j - X_k| > \varepsilon) = \int_{|x|>\varepsilon} (2\pi\sigma_{j,k}^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x - m_{j,k})^2}{2\sigma_{j,k}^2}\right] dx$$

又由（1.57）式知，$\sigma_{j,k}^2$ 與 $m_{j,k}^2$ 不同時趨近於 0，所以對足夠小的 $\varepsilon > 0$，我們有

$$\limsup_{j,k\to\infty} P(|X_j - X_k| > \varepsilon) \ge \frac{1}{2}.$$

此式表示 $\{X_n\}$ 不按機率收斂，這是一個矛盾。

$\{X_n\}$ 的均方意味收斂不過就是 Hilbert 空間 $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 中的強收斂，故在 $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 可找到極限 X_∞。今 X_n 與 1 的內積 $E(X_n)$

$=m_n$ 以及 X_n-m_n 的範數平方 $V(X_n)=\sigma_n^2$ 皆收斂，令其極限分別爲 m 及 σ^2。因此 X_n 的特徵函數收斂到 $N(m,\sigma^2)$ 的特徵函數，此極限函數必爲 X_∞ 的特徵函數。這就證明了命題的第二部分。 #

一般而言，殆遍收斂必爲按機率收斂，故我們得到

【推論 1】 設 $\{X_n, n\geq 1\}$ 爲Gauss 型系統，則序列 $\{X_n\}$ 的殆遍收斂性必爲均方意味收斂。

給一個 Gauss 型系統 **X**。由定義知 **X** 的聯合上 **X** 的元素之任何線性組合還是一個 Gauss 型系統。復次我們有

【推論 2】 設 **X** 爲 Gauss 型系統，則由 **X** 所生成的閉線性子空間 $\overline{\mathbf{X}}(\subset L^2(\Omega,\mathrm{B},P))$ 仍爲一個Gauss 型系統。

【略證】 我們可設Gauss 型系統 **X** 爲一個線性空間，因爲若不然，可以加進所有必要的有窮線性組合，仍然還是一個 Gauss 型系統。今取 $X_j\in\overline{\mathbf{X}}$，$1\leq j\leq n$，將它們表成均方極限：

$$\lim_{n\to\infty} X_j^{(n)}=X_j,\qquad X_j^{(n)}\in\mathbf{X}.$$

顯然任何（有窮）線性組合 $\Sigma_{j=1}^n \alpha_j X_j$ 也可表成極限形式：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^m \alpha_j X_j^{(n)}=\sum_{j=1}^m \alpha_j X_j,\qquad \sum_{j=1}^m \alpha_j X_j^{(n)}\in\mathbf{X}.$$

由命題 1.11 的第二部分可知，上面的極限也是一個Gauss 型隨機變數。這就證明了 $\overline{\mathbf{X}}$ 爲一個Gauss 型系統。 #

今取子集 $\Lambda'\subseteq\Lambda$，考慮 Gauss 型系統 $\mathbf{X}=\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 的子系統 $\mathbf{X}'=\{X_{\lambda'}:\lambda'\in\Lambda'\}$。當然 $\mathbf{X}'$ 仍是一個Gauss 型系統。令 $\mathbf{B}'$ 爲使得 $\mathbf{X}'$ 的元素皆可測的最小 σ 體。爲了簡便起見，我們假設 $L^2(\Omega,B,P)$ 的閉線性子空間 $\overline{\mathbf{X}}'$ 是可裂分的。

【命題 1.12】

對於 Gauss 型系統 **X** 的任意元素 X_λ，我們有

$$E(X_\lambda \mid \mathbf{B}') = X_\lambda \quad \text{正交投影到} \ \overline{\mathbf{X}}' \tag{1.58}$$

【註記】 命題 1.4 證明了條件期望 $E(X_\lambda \mid \mathbf{B}')$ 爲從 X_λ 正交投影到 $L^2(\Omega, \mathbf{B}', P)$，但是（1.58）却進一步斷言，這個投影投到較小的子空間 $\overline{\mathbf{X}}'$。

【略證】 因爲 $\overline{\mathbf{X}}'$ 爲可裂分，故可取到一個序列 $\{X_{\lambda_n}\} \subset \overline{\mathbf{X}}'$ 使得若 $\mathbf{B}_n$ 爲由 $X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, \cdots, X_{\lambda_n}$ 生成的 σ 體，則

$$\mathbf{B}_n \to \mathbf{B}' \quad \text{當} \quad n \to \infty.$$

對任意 $X_\lambda \in \mathbf{X}$，由於 X_λ，$X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, \cdots, X_{\lambda_n}\}$ 爲 Gauss 型，故存在一個 Gauss 型隨機變數 Y_n 使得 Y_n 獨立於 $\mathbf{B}_n$，並且 X_λ 可表成下形

$$X_\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_j X_{\lambda_j} + Y_n,$$

記和 $\Sigma_1^n a_j X_{\lambda_j}$ 爲 $X_\lambda^{(n)}$，並且觀察到它爲 $\mathbf{B}_n$ 可測，又滿足

$$E(X_\lambda \mid \mathbf{B}_n) = X_\lambda^{(n)}.$$

然而 $X_\lambda^{(n)}$ 可看作是 X_λ 正交投影到 $\{X_{\lambda_j}, j = 1, 2, \cdots, n\}$ 所生成的子空間。今令 $n \to \infty$，再利用命題 1.4 的推論及上述事實，就得證了。

#

假設上面的記號繼續有效，利用命題 1.12 很容易就可獲得下面的

【推論】 $\{E(X_\lambda \mid \mathbf{B}') : \lambda \in \Lambda\}$ 也是 $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 上的 Gauss 型系統。

如果隨機過程 $\{X(t) : t \in T\}$ 爲 Gauss 型系統，則它也是第 1.3 節意味下的 Gauss 過程。由定理 1.10 第二部分的證明可知，一個 Gauss 過程的分佈由其平均向量與協變函數所唯一決定。於是我們有

【命題 1.13】

一個 Gauss 過程若爲弱平穩，則必爲強平穩。

1.7 Gauss 型分佈的刻劃

在上一節中我們已看過Gauss 型分佈與Gauss 型隨機變數具有許多有趣的性質。本節我們展示反過來的取向，提出 Gauss 型隨機變數與分佈的一些刻劃。這種刻劃除了本身就具有興味外，還有很重要的應用。我們由一維 Gauss 型分佈開始說起。

(a) 取特徵函數的對數 $\log\varphi(z)$，再取一支使得當 $z=0$ 時 $\log\varphi(z)=0$。如果這個對數函數用 Taylor 級數來表達

$$\log\varphi(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{(iz)^k\gamma_k}{k!}+o(|z|^N)\text{（對某些}N\text{而言）}$$

則係數 γ_k 爲實數，稱爲 k 級累積量（k-th order cumulant）。一般而言，若分佈的 k 級矩 m_k 存在，則 γ_k 亦存在，並且可用 k 與 k 以下的各級矩來表達。例如

$$\gamma_1=m_1\ (=\text{期望值}),\qquad \gamma_2=m_2-m_1^2\ (=\text{方差}),$$
$$\gamma_3=m_3-3m_1m_2+2m_1^3,\qquad \text{等等。}$$

【命題 1.14】

一個分佈爲Gauss 型的充要條件是：所有級的累積量 γ_k 皆存在並且滿足

$$\gamma_k=0,\qquad k\geq 3. \tag{1.59}$$

【注意】 Poisson 分佈也由累積量的一個簡單條件來刻劃：對所有 $k\geq 1$，

$$\gamma_k=\gamma\text{（常數）}$$

(b) 當一個機率分佈相對於 Lebesgue 測度絕對連續時，我們可以利用機率密度 $p(x)$ 定義一類訊息度量 $H(p)$ 爲

$$H(p)=-\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\log p(x)\,dx, \tag{1.60}$$

其中 $0\log 0$ 規定爲 0 。函數 $H(p)$ 稱爲分佈之**微分熵**（differential entropy）或熵。

【命題 1.15】

考慮 **R** 上具有固定的有窮方差 σ^2 之所有機率密度所成的集合，如果 p 在此集合中變動，則 $H(p)$ 的極大值爲 $\log\sigma+½\log 2\pi e$ 並且極大點爲具有方差 σ^2 之 Gauss 型密度。

【證明】 由 Jensen 不等式知，對任意兩個密度 $p(x)$ 與 $q(x)$ 下式成立：

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log p(x)\,dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log q(x)\,dx. \tag{1.61}$$

今令 $p(x)$ 爲具有方差 σ^2 的任意密度，再令 $q(x)$ 爲具有方差 σ^2 的 Gauss 型密度且跟 $p(x)$ 具有相同的期望値 m，亦即

$$q(x)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

由不等式（1.61）得到

$$\begin{aligned} H(p) &\leq -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\left\{-\log(2\pi\sigma^2)^{1/2}-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}dx \\ &= \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)+\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以 $H(q)$ 確是等於上式右項。 #

【註記】 由 $H(p)$ 的定義不難看出，對 p 作平移，$H(p)$ 是不變的。特別地，它不依賴於分佈的期望值。

(c) Gauss 分佈具有自我生成的性質：若 X_1 與 X_2 是獨立的 Gauss 型隨機變數，則和 $S=X_1+X_2$ 也是 Gauss 型（並且 S 的期望值與方差分別爲 X_1 與 X_2 的期望值與方差之和。令人驚奇的是，反過來也成立：如果和 S 爲 Gauss 型，則 X_1 與 X_2 也是 Gauss 型。這個結果是 P. Lévy 最先的猜測，然後在 1936 年由 H. Cramér 提出證明。下面我們明確地敍述出這個

結果。

【定理 1.11】

設X_1與X_2爲獨立的隨機變數。如果它們的和$S = X_1 + X_2$具有Gauss型分佈，則X_1與X_2也都具有Gauss型分佈。

【證明】 設F_1與F_2分別爲X_1與X_2的分佈函數。因爲S具有Gauss型分佈，不妨設其期望值爲m，方差爲σ^2。由獨立性的假設及$S = X_1 + X_2$得

$$\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\,dF_2(y),$$

其中Φ爲標準Gauss分佈函數，用$x+y$代替x，並且利用$F_1(x)$對x的單調性，我們得到

$$\Phi\left(\frac{x+y-m}{\sigma}\right) \geq \int_{-\infty}^{y} F_1(x+y-u)\,dF_2(u)$$

$$\geq F_1(x)\int_{-\infty}^{y} dF_2(u) = F_1(x)F_2(y).$$

固定y使得$F_2(y) > 0$，並且利用不等式

$$1-\Phi(x)+\Phi(-x) < \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} x^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

（此式對足夠大的x成立）得知，存在一正數A與B使得對所有x

$$1-F_1(x)+F_1(-x) < A\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}+B|x|\right).$$

對此不等式作分部積分，得證

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) dF_1(x) < \infty$$

因而F_1的特徵函數$\varphi_1(z)$爲一個全純函數(entire function)。進一步

，由計算式

$$|\varphi_1(z)| \le \int \exp\left[\sigma^2|z|^2 + \frac{x^2}{4\sigma^2}\right] dF_1(x)$$
$$= J \exp(\sigma^2|z|^2)$$

得知 φ_1 的階數爲 2 。對 $F_2(x)$ 的特徵函數 $\varphi_2(z)$ 也可得完全相同的結果，這只要由對稱性的考慮就好了。今由假設得知

$$\varphi_1(z)\varphi_2(z) = \exp\left(imz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right)$$

因此 φ_1 與 φ_2 無零根。於是可利用全純函數的 Hadamard 定理得到下面有關 φ_j ，$j=1$ ，2 的表式：

$$\varphi_j(z) = \exp[\alpha_j z^2 + \beta_j z + \gamma_j], \qquad j = 1, 2. \tag{1.62}$$

此時回想特徵函數的一般性質：

$$\overline{\varphi_j(z)} = \varphi_j(-z), \qquad |\varphi_j(z)| \le 1, \qquad j = 1, 2, \quad z \in \mathbf{R}.$$

這些式子對 α_j ，β_j ，γ_j 所產生的限制導致我們有

$$\varphi_j(z) = \exp\left[im_j z - \frac{1}{2}\sigma_j^2 z^2\right], \qquad j = 1, 2,$$

這就是我們所要證明的結果。顯然 $m = m_1 + m_2$ ，$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ 。 #

(d) 令 X_1 與 X_2 爲獨立的隨機變數。對於適當選取的常數 a ，b ，c 與 d ，下面兩個線性組合

$$Y_1 = aX_1 + bX_2$$
$$Y_2 = cX_1 + dX_2$$

也是獨立的。這是Gauss 系統所具有的典型性質。有這個事實作基礎，下面我們來討論M. Kac（1940）的結果。

【命題 1.16】

假設隨機變數X_1與X_2是獨立的，如果對所有的θ，隨機變數Y_1與Y_2也是獨立的，其中

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \cos\theta + X_2 \sin\theta \\ Y_2 &= X_1 \sin\theta - X_2 \cos\theta, \end{aligned} \tag{1.63}$$

則X_1與X_2具有相同的Gauss分佈，期望值爲0（因而Y_1與Y_2亦然）。

【註記】 Maxwell研究$\mathbf{R}^3$中分子的速度分佈時，假定對所有正交坐標系三個速度分量都是Gauss型隨機變數，並且具有期望值0。如果我們利用上面的命題，將它適當地推廣到三個變數，則得知三個分量必具有相同的Gauss分佈。這跟第1.2節例3的結論也是一致的。

【定理 1.12】

假設X_1與X_2是獨立的隨機變數，並且隨機變數Y_1與Y_2定義爲

$$\begin{aligned} Y_1 &= aX_1 + bX_2 \\ Y_2 &= cX_1 + dX_2, \qquad ad - bc \neq 0, \end{aligned} \tag{1.64}$$

如果Y_1與Y_2是獨立的，則除了無聊的情形$b = c = 0$或$a = d = 0$之外，X_1與X_2皆爲Gauss型分佈。

證明這個定理需要利用下面的補題。

【補題 1.6】

設f_1與f_2爲兩個實值連續函數，而且也不爲常函數。再設a，b，c與d爲滿足$ad - bc \neq 0$的常數。如果存在函數g_1與g_2使得

$$f_1(ax + by) f_2(cx + dy) = g_1(x) g_2(y) \qquad x, y \in \mathbf{R} \tag{1.65}$$

則$\log|f_j|$與$\log|g_j|$，$j = 1$，2，都是至多爲二次的多項式。

【證明】 顯然g_1與g_2爲連續函數。因爲$ad - bc \neq 0$，故可將線性式$ax + by$與$cx + dy$想成獨立變數。進一步我們看出，函數f_1，f_2，g_1與g_2中沒有一個等於0，故可設它們恒爲正的。令

$$\log f_j = v_j, \quad \log g_j = w_j, \quad j = 1, 2.$$

則（1.65）變成

$$v_1(ax + by) + v_2(cx + dy) = w_1(x) + w_2(y). \tag{1.66}$$

因爲 v_1，v_2 與 w_2 皆爲局部可積，視爲 y 的函數，所以它們可以跟空間 $\mathscr{D}$ 的函數作卷積，於是 w_1 爲一個 $\mathscr{C}^\infty$ 函數。同理，w_2 亦然。今由假設 $ad - bc \neq 0$ 知，$ax + by$ 與 $cx + dy$ 可取爲新的獨立變數，因此（1.66）式對於 v_j 與 w_j（$j = 1, 2$）是對稱的。從而我們已證明 v_1 與 v_2 也是 $\mathscr{C}^\infty$ 函數。

再次回到（1.66）式，對 x 與 y 偏微分，得到方程式：

$$abv_1''(ax + by) + cdv_2''(cx + dy) = 0.$$

假設 $ab \neq 0$ 與 $cd \neq 0$，我們看出 v_1 與 v_2 都是至多爲二次的多項式，因而補題證畢。 #

【定理 1.12 的證明】

1. 我們首先在進一步假設之下證明這個定理。假設 X_1 與 X_2 皆對稱於原點。今因 Y_1 與 Y_2 是獨立的，我們有

$$E\{\exp[i(z_1 Y_1 + z_2 Y_2)]\} = E\{\exp[iz_1 Y_1]\}E\{\exp[iz_2 Y_2]\}.$$

如果我們令 X_1，X_2，Y_1，Y_2 的特徵函數分別爲 φ_1，φ_2，ψ_1，ψ_2，則由（1.64）式可知上面的方程式變成

$$\varphi_1(az_1 + cz_2)\varphi_2(bz_1 + dz_2) = \psi_1(z_1)\psi_2(z_2).$$

在分佈爲對稱的假設下，這些特徵函數都是取實值的，並且當然也是連續。在進一步的假設 $abcd \neq 0$ 下，我們可以利用補題 1.6（將 b 與 c 交換），得到

$$\varphi_j(z) = \exp[\alpha_j z^2 + \beta_j z + \gamma_j], \quad j = 1, 2.$$

由一般的條件 $\varphi_j(0)=1$ 得知 $r_j=0$，另外由對稱性得知 $\beta_j=0$。復次，由 $|\varphi_j(z)|\leq 1$ 得知，可記 $\alpha_j=-\frac{1}{2}\sigma^2$，因而證得 X_1 與 X_2 具有期望值爲0的Gauss分佈。對於 $ab=0$ 的情形（或 $cd=0$），X_2（或 X_1）是無聊的，亦即恒等於0。

2 對於 X_1 與 X_2 的分佈不爲對稱的一般情形，只要利用一點兒技巧就可以將它們化約成對稱的情形。我們展示在下面。

令 X_1^- 與 X_2^- 爲獨立隨機變數分別跟 $-X_1$ 與 $-X_2$ 具有相同的分佈，使得 (X_1, X_2) 與 (X_1^-, X_2^-) 是獨立的。再令

$$X_j^0 = X_j + X_j^-, \qquad j=1,2,$$

我們看出 X_j^0 的分佈是對稱的（$j=1,2$）。因爲，Y_1 與 Y_2 是獨立的，所以 $aX_1^-+bX_2^-$ 與 $cX_1^-+dX_2^-$ 也是獨立的。因此對稱化的隨機變數

$$Y_1^0 = aX_1^0 + bX_2^0 = (aX_1 + bX_2) + (aX_1^- + bX_2^-)$$
$$Y_2^0 = cX_1^0 + dX_2^0 = (cX_1 + dX_2) + (cX_1^- + dX_2^-)$$

是獨立的。今利用上述部分(1)的結果，可知 X_1^0 與 X_2^0 都具有Gauss型分佈。再對獨立隨機變數 X_1^- 與 X_2^0 的和應用定理1.11，最後推導出 X_1 與 X_2 都具有Gauss型分佈。 #

這個定理有許多推廣，下面我們給出其中兩個結果。

【命題1.17】（見 Yu. V. Linnik, 1964）

設 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 爲獨立的隨機變數，令隨機變數 Y_1 與 Y_2 定義爲

$$Y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j$$
$$Y_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j X_j$$

如果 Y_1 與 Y_2 是獨立的，則對於 $a_j b_j \neq 0$ 所對應的 X_j 必具有Gauss型分佈。

【命題 1.18】 （見 E. Lukacs, 1970）

設 $\{X_n\}$ 爲一列獨立的且具有相同分佈的隨機變數，$\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 爲實數所成的兩數列，滿足 $\Sigma_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|\neq 0$，並且 $\Sigma_{n=1}^{\infty}a_n^2/b_n^2$ 或 $\Sigma_{n=1}^{\infty}b_n^2/a_n^2$ 之中有一個爲收斂。進一步假設和 $Y_1=\Sigma_{n=1}^{\infty}a_nX_n$ 與 $Y_2=\Sigma_{n=1}^{\infty}b_nX_n$ 兩者皆存在，並且 Y_1 與 Y_2 是獨立的。然則，X_j 具有 Gauss 型分佈。

(e) 下一定理是 P. Lévy 在 1957 年證明的。

【定理 1.13】

X 與 Y 爲兩隨機變數，使得存在隨機變數 U 與 V 分別獨立於 X，Y，滿足：

$$\begin{aligned} Y &= aX + U \\ X &= bY + V \end{aligned} \tag{1.67}$$

其中 a，b 爲常數，然則，我們有下面的結論：

1. （X，Y）具有 Gauss 型分佈。
2. X 與 Y 是獨立的。
3. X 與 Y 之間存在一個平直關係（affine relation）。

這個定理的證明類似於定理 1.12，必須解相當於（1.66）式之函數方程式。爲了避免重複這種論證，我們略去其證明。

這個定理在形式上雖然類似於定理 1.12，但是它在隨機過程的線性理論上，例如，在隨機過程的線性預測理論上，却具有深刻的意義。事實上，這個定理確立了一類我們可以在其中有效運用線性操作的隨機過程。

(f) 最後我們注意到一個簡單的結論，雖然在相當局限的條件下給出，但是却指示有關研究無窮維空間上的某些分佈（見第 5.6 節）的路向。

【命題 1.19】

假設 n 維隨機變數（X_1，X_2，…，X_n）的分佈在相對於原點的所有旋轉（$u_{j,k}$：$1\leq j$，$k\leq n$）〔即（$u_{j,k}$）$\in SO(n)$〕之下是不變的，如果 n 個隨機變數

$$Y_j = \sum_{k=1}^{n} u_{j,k} X_k, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

是互相獨立的，則存在某常數 c ，使得隨機向量（ cX_1 ， cX_2 ，…， cX_n ）具有 n 維標準Gauss 分佈（參見命題1.1.6）。

第二章

Brown運動

本章我們由Brown運動的定義開始講起，並且證明它的機率分佈的撐台（support）是連續函數空間（第2.1節）。接着探討Brown運動的一些重要性質。諸如樣本路徑的行爲（第2.2節）及Markov性（第2.4節）。透過這些探討，我們才能欣賞Brown運動在所有隨機過程中，特別是在Gauss過程中，所佔的重要地位。我們給出兩種建構Brown運動的方法（第2.3節），每一種方法除了具有本身內在的重要意義之外，而且也展示了跟以後諸章有關的隱藏於建構背後的觀念。雖然我們只簡略觸及Markov性（第2.4－2.6節），但是希望這樣就足以使我們看出Brown運動與分析學的密切關係。

2-1 Brown運動，Wiener測度

讓我們先給出Brown運動的定義。

【定義2.1】

一個定義在機率空間$(\Omega, \mathbf{B}, P)$上的隨機過程$\{W(t, \omega): t \geq 0\}$，如果滿足下列(a)與(b)兩性質，就稱爲一個Brown運動或一個Wiener過程。

(a) $W(0, \omega) = 0$，對殆遍的ω均成立；

(b) $\{W(t, \omega): t \geq 0\}$爲$(\Omega, \mathbf{B}, P)$上的Gauss型系統，並且對任意$t$與$h$具有$t+h>0$時，$W(t+h, \omega) - W(t, \omega)$的期望値爲0，方差爲$|h|$。

參數t表示時刻，而時軸通常取爲區間$[0, 1]$或$[0, \infty)$。Wiener過程的存在性我們暫時放着不管，今先給出上述定義的一些衍生結果。

1. 爲了要決定$\{W(t): t \geq 0\}$的分佈，我們只要知道協變函數（covariance function）就好了。這是因爲$\{W(t): t \geq 0\}$爲Gauss

過程並且每個$W(t)$的平均值皆為0。對等式

$$W(t)W(s)=\frac{1}{2}\{W(t)^2+W(s)^2-[W(t)-W(s)]^2\}$$

兩邊取期望值，並且利用(b)就得到

$$E\{W(t)W(s)\}=\min\{t,s\}(=t\wedge s). \tag{2.1}$$

另一方面，由(2.1)式及$E\{W(t)\}=0$，可得到定義2.1的後半部(b)。

2. 對於$a<b\leq c<d$，隨機向量$(W(b)-W(a), W(d)-W(c))$具有兩元Gauss分佈，又由(b)知，其平均值為(0,0)；進一步我們有

$$E\{[W(b)-W(a)][W(d)-W(c)]\}=b\wedge d-b\wedge c-a\wedge d+a\wedge c=0,$$

因此$W(b)-W(a)$與$W(d)-W(c)$是獨立的。更一般地，對於任意有限個在a之前的時刻$t_1, t_2, \cdots, t_n$，即$t_i\leq a$，$i=1,2,\cdots,n$，$W(b)-W(a)$獨立於$\{W(t_i): 1\leq i\leq n\}$。直觀地說，這表示$W(t)$在$[a,b]$上的增分(increment) $W(b)-W(a)$獨立於在時刻a之前的過去$\{W(s): s\leq a\}$，此地$\{W(s): s\leq a\}$表示相對於現在時刻$t=a$，$W(t)$的過去值所成的集合。在此意味下，$\{W(t): t\geq 0\}$為一個**加法過程**(additive process)。這個事實與定義2.1的(b)，使我們可以對任意$0<t_1<t_2<\cdots t_n$，定出隨機向量$(W(t_1), W(t_2), \cdots, W(t_n))$的分佈。[另一方面，這個分佈為Gauss型是指它可由上面(2.1)式的協變函數來決定]。不論如何，此分佈的密度函數為

$$\prod_{k=1}^{n}\{2\pi(t_k-t_{k-1})\}^{-1/2}\exp\left[\frac{-(x_k-x_{k-1})^2}{2(t_k-t_{k-1})}\right] \tag{2.2}$$

其中令$t_0=x_0=0$。記此密度函數為

$$g(t_1, t_2-t_1, \ldots, t_n-t_{n-1}; x_1, x_2-x_1, \ldots, x_n-x_{n-1})$$

並且稱函數 g 爲Gauss 核。

3. 利用上述結果與定義 2.1，我們容易證得下面命題。

【命題 2.1】

設 $\{W(t): t \geq 0\}$ 爲一個Brown 運動，則

1. 對於任意固定的實數 $a > 0$ 與 $\lambda \neq 0$，由下面(A)與(B)所給定的過程都是Brown 運動：
 A. $\{W(t+a) - W(a): t \geq 0\}$，
 B. $\{\lambda^{-1} W(\lambda^2 t): t \geq 0\}$（時空變換），特別地 $\{-W(t): t \geq 0\}$；
2. $\{W(t): t > 0\}$ 與 $\{tW(1/t): t > 0\}$ 具有相同的分佈。

【註記】 雖然只要注意到(2)中兩過程的協變函數相同，就可以證明(2)的斷言，但是這個結果值得記錄下來，因爲它可推廣成"Brown運動的射影不變性"。

Brown 運動的存在性，可利用（2.2）式之岸界分佈及Kolmogorov延拓定理［見第 1.3 節［2］］來證明。其次我們將證明，對於殆遍的 ω，樣本函數 $t \to W(t, \omega)$ 是連續的。因此，$\{W(t): t \geq 0\}$ 的所有分佈，比如 μ^w，可令其定義在空間 $\mathscr{C} = \mathscr{C}[0, \infty)$ 上，其中 $\mathscr{C}[0, \infty)$ 表 $[0, \infty)$ 上所有連續函數全體。這樣就出現了Wiener 測度 μ^w，本節所剩的篇幅就專注於討論這個測度。

首先我們在 $\mathscr{C}$ 上建構一個可測空間。$\mathscr{C}$ 的一個柱集［參見第 1.3 節，［2］］是指形如

$$A = \{w: (w(t_1), \dots, w(t_n)) \in B_n\} \tag{2.3}$$

的子集，其中 $\{t_j\}$ 表滿足 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 的 n 個時刻，B_n 表 n 維Borel 集，w 表 $\mathscr{C}$ 的元素，即 $[0, \infty)$ 上的一個連續函數。今讓 n、時刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$、以及集 B_n 變動，我們得到 $\mathscr{C}$ 的一族子集 $\mathfrak{A}$。容易驗證 $\mathfrak{A}$ 爲一個體（field）或環（algebra）。令 $\mathfrak{B}$ 爲由 $\mathfrak{A}$ 所產生的 σ 體，於是我們得到可測空間 $(\mathfrak{C}, \mathfrak{B})$，在其上我們要來定義 μ^w。

爲了讓 μ^w 等同於Brown 運動 $\{W(t): t \geq 0\}$ 的分佈，我們必須證

明：(1) μ^w 具有可列加性，並且(2)對任意 $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ 及 n 維Borel集 B_n，我們有

$$P((W(t_1), \ldots, W(t_n)) \in B_n) = \mu^W(A), \tag{2.4}$$

其中 A 爲（2.3）的柱集。下面的定理證明了Brown運動的分佈集中在$(\mathscr{C}, \mathfrak{B})$上，並且跟 μ^w 一致［Yu. V. Prokhorov（1956），K. Ito的Lectures on stochastic processes，1961］。

【定理2.1】

在$(\mathscr{C}, \mathfrak{B})$上存在唯一的機率測度 μ^w 滿足（2.4）式。

【證明】 我們分成兩個步驟來證明：首先在$(\mathscr{C}, \mathfrak{A})$上定義一個有窮加性的測度 m，然後再延拓成$(\mathscr{C}, \mathfrak{B})$上的一個（可列加性）測度 μ^w。

1. 如果柱集 A 形如（2.3）式，則定義 $m(A)$ 爲

$$m(A) = \int_{B_n} \cdots \int g(t_1, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}; x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}) \times dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \tag{2.5}$$

其中 g 爲（2.2）式所述的Gauss核。這個定義在$\mathfrak{A}$上的集函數 m 是適定的，亦即 $m(A)$ 與 A 的表現法無關。例如，我們注意到，如果加入一個新的時刻 $t_{n+1} > t_n$，並且Borel集 B_n 改成 $B_n \times \mathbf{R}$，則相應於（2.5）式的積分值並沒有改變。

今我們證明 m 爲$\mathfrak{A}$上的有窮加性測度。令 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 爲$\mathfrak{A}$中的互斥元素，並且讓定義 A_i 所牽涉到的時刻取遞增的次序 $t_1 < t_2 < \cdots < t_p$。今可設每個 A_i 皆由某 p 個這種時刻及某個 p 維Borel集所決定，並且這些Borel集爲互斥。於是由（2.5）式立即得到

$$m\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n m(A_i),$$

所以具有有窮加性。這個結果再加上顯然成立的 $0 \leq m(A) \leq 1$，

$A \in \mathfrak{A}$，$m(\mathscr{C}) = 1$，就證明了m為$(\mathscr{C}, \mathfrak{A})$上的一個有窮加性測度。

2. 為了將上面所得的測度m延拓成$(\mathscr{C}, \mathfrak{B})$上的可列加性測度，我們要利用下面的補題。

【補題 2.1】

假設$(\mathscr{C}, \mathfrak{A})$上的一個有窮加性測度$m$滿足下面性質：

(*) 對任意遞降序列$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$，$A_n \in \mathfrak{A}$，$\forall_n$，由假設$m(A_n) > \varepsilon\ (> 0)$，$\forall_n$，可得

$$\bigcap_n A_n \neq \varnothing.$$

然則m可唯一延拓成$(\mathscr{C}, \mathfrak{B})$上的一個可列加性測度，其中$\mathfrak{B}$為由$\mathfrak{A}$所產生的$\sigma$體。

今驗證上述(*)的條件。假設A_n寫成

$$A_n = \{w: (w(t_1^{(n)}), \dots, w(t_{r_n}^{(n)})) \in B_n\}.$$

我們可假設$\{t_i^{(n)}\}$具有下列性質（必要的話加進一些新的時刻點）：存在一遞增正整數列$\{q_n\}$使得對每個n，我們有

1. $t_i^{(n)} \leq q_n$，$1 \leq i \leq r_n$；
2. 對所有的k，$1 \leq k \leq q_n 2^{q_n+1}$，存在唯一時刻$t_i^{(n)} \in [(k-1)2^{-q_n}, k2^{-q_n}]$；
3. 時刻點$k2^{-q_n}$，$0 \leq k \leq 2^{q_n}$皆被包含於$\{t_1^{(n)}, \cdots, t_{r_n}^{(n)}\}$之中。

再利用進一步的設計，諸如令時刻點增加，以及將同一個A_n重複必要多的次數，於是我們可假設

$$q_n = n, \ t_{2k}^{(n)} = k2^{-n}, \ r_n = n2^{n+1}.$$

引入記號$\varphi(n) = n2^{n+1}$，我們可綜述如下：

$$
\begin{aligned}
&A_n = \{w \in \mathscr{C} : (w(t_1^{(n)}), \ldots, w(t_{\varphi(n)}^{(n)})) \in B_n\}, \\
&B_n \text{ 爲 } \mathbf{R}^{\varphi(n)} \text{ 的 Borel 子集} \\
&t_{2k}^{(n)} = k2^{-n}, \{t_1^{(n)}, \ldots, t_{\varphi(n)}^{(n)}\} \subseteq \{t_1^{(n+1)}, \ldots, t_{\varphi(n+1)}^{(n+1)}\}, \\
&m(A_n) > \varepsilon\ (> 0).
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

利用測度論的標準技巧，在定義A_n中的B_n可取爲緊緻集，這樣做可能要將上述的ε取得小一點。

今轉而討論m。固定$t_1, t_2, \cdots, t_n$，取$\mathfrak{A}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$爲(2.3)式的柱集（讓$B_n$在$\mathbf{R}^n$的Borel集變動）所產生的$\sigma$體。於是我們得到一個測度空間$(\mathscr{C}, \mathfrak{A}(t_1, t_2, \cdots, t_n), m)$，而$w \in \mathscr{C}$可視爲一個隨機參數，使得隨機向量$(w(t_1), w(t_2), \cdots, w(t_n))$的分佈由(2.5)式給定。今考慮$n = 2$且$t_1 = s$，$t_2 = t$的特殊情形，因爲$w(t) - w(s)$爲一個Gauss隨機變數，其平均值爲0，方差爲$|t-s|$，所以

$$
\int_{\mathscr{C}} |w(t) - w(s)|^4 \, dm(w) = 3|t - s|^2. \tag{2.7}
$$

利用Tchebychev不等式，我們得到

$$
m(w : |w(t_i^{(n)}) - w(t_{i-1}^{(n)})| \geq |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}|^{1/5}) \leq 3 \cdot 2^{-6n/5}.
$$

因此我們有

$$
m\left(\bigcup_{i=1}^{\varphi(n)} (w : |w(t_i^{(n)}) - w(t_{i-1}^{(n)})| \geq |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}|^{1/5})\right) \leq 6n2^{-n/5}.
$$

今因級數$\Sigma_n n 2^{-n/5}$收斂，故存在一個整數m_0使得$6\Sigma_{n \geq m_0} n 2^{-n/5} < \frac{1}{2}\varepsilon$。對於$m_0$，我們有

$$
m\left(\bigcup_{n=m_0}^{l} \bigcup_{i=1}^{\varphi(n)} (w : |w(t_i^{(n)}) - w(t_{i-1}^{(n)})| \geq |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}|)\right) < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\, l > m_0
$$

令A_l與上式w集的補集之交集爲C_l，由假設$m(A_l) > \varepsilon$得

$$m(C_l) > \frac{1}{2}\varepsilon.$$

序列C_l顯然滿足

$$C_l \neq \varnothing,\ C_l \supseteq C_{l+1},\ A_l \supseteq C_l.$$

所以要完成定理的證明，只要證明

$$\bigcap_l C_l \neq \varnothing \qquad \left(\text{因而} \ \bigcap_l A_l \neq \varnothing\right).$$

今我們建構一個屬於每個C_l的連續函數，以證明這個事實。

令w_l爲C_l的一元，在$[\,t_{i-1}^{(l)}\,,\ t_i^{(l)}\,]$取直線段並且滿足$w(\,t_1^{(1)}\,)=0$；這種函數顯然存在。因爲對於$m_0 \leq n \leq l$，$1 \leq i \leq n\,2^{n+1}$它滿足

$$|w_l(t_i^{(n)}) - w_l(t_{i-1}^{(n)})| < |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}|^{1/5} \leq 2^{-n/5}$$

因此我們有

$$|w_l(k2^{-n}) - w_l((k-1)2^{-n})| < 2 \cdot 2^{-n/5}, \qquad m_0 \leq n \leq l,\ 1 \leq k \leq n2^{n+1}.$$

對滿足

$$k' < k,\ k2^{-l} - k'2^{-l} < 2^{-m_0},$$

的任意兩整數k，k'，存在一整數q使得

$$q < l,\ 2^{-q} \leq k2^{-l} - k'2^{-l} < 2^{-q+1}.$$

因此我們可找到一整數j使得$k'\,2^{-l} \leq j\,2^{-q} < (\,j+1\,)\,2^{-q} \leq k\,2^{-l}$。因爲$w_l \in C_q$，故對此$j$我們有

$$|w_l(j2^{-q}) - w_l((j+1)2^{-q})| < 2 \cdot 2^{-q/5}.$$

重複類似的論證，可找到一正數μ，使得

$$|w_l(k2^{-l}) - w_l(k'2^{-l})| < \mu\,|k2^{-l} - k'2^{-l}|^{1/5}.$$

因此存在另一正數 μ' 使得若 $|t_i^{(l)}-t_j^{(l)}|\leq 2^{-m_0}$，則有

$$|w_l(t_i^{(l)})-w_l(t_j^{(l)})|<\mu'|t_i^{(l)}-t_j^{(l)}|^{1/5}.$$

回想一下，w_l 的圖形爲一折線，故對任意 s，$t\in[t_i^{(l)},t_j^{(l)}]$，我們有

$$|w_l(t)-w_l(s)|\leq 4\mu'|t_i^{(l)}-t_j^{(l)}|^{1/5}.$$

今因 $w_{l+p}\in C_l$，$\forall p>0$，亦即

$$(w_{l+p}(t_1^{(l)}),\ldots,w_{l+p}(t_{2^l+1}^{(l)}))\in B_l,$$

又因 B_l 假設爲緊緻，所以當 $p\to\infty$ 時上述序列在 B_l 中收斂。利用對角線論證法，可取到子序列，譬如說記爲 $\{w_n\}$，使得當 $n\to\infty$ 時 $\{w_n(t_i^{(l)})\}$ 收斂，$\forall i$，l。

對任意給定的 t_0 與 $\eta>0$，存在足夠大的 n_0 使得

$$t_i^{(n_0)}\leq t_0<t_{i+1}^{(n_0)},\ t_{i+1}^{(n_0)}-t_i^{(n_0)}<2^{-n_0}<\eta^5,$$

$$|w_l(t_i^{(n_0)})-w_m(t_i^{(n_0)})|<\eta \text{ 對足夠大的 } l\text{，}m\geq n_0 \text{ 成立。}$$

假設 $t_j^{(l)}$，$t_k^{(m)}\in[t_i^{(n_0)},t_0]$，於是有

$$\begin{aligned}|w_l(t_0)-w_m(t_0)|&\leq|w_l(t_0)-w_l(t_j^{(l)})|+|w_l(t_j^{(l)})-w_l(t_i^{(n_0)})|\\&\quad+|w_l(t_i^{(n_0)})-w_m(t_i^{(n_0)})|+|w_m(t_i^{(n_0)})-w_m(t_k^{(m)})|\\&\quad+|w_m(t_k^{(m)})-w_m(t_0)|\\&\leq|t_0-t_j^{(l)}|^{1/5}+\mu'|t_j^{(l)}-t_i^{(n_0)}|^{1/5}+\eta\\&\quad+\mu'|t_i^{(n_0)}-t_k^{(m)}|^{1/5}+|t_k^{(m)}-t_0|^{1/5}\\&<a\eta,\qquad a \text{ 爲一常數。}\end{aligned}$$

上式的計算對所有 $t\in[t_i^{(n_0)},t_{i+1}^{(n_0)}]$ 均成立。復次，由不等式

$$|w_l(t)-w_l(s)|<4\mu'|t_i^{(l)}-t_j^{(l)}|^{1/5}$$

得知，序列 $\{w_n\}$ 的極限函數 w^* 也是一個連續函數。因爲我們可以證明

$$(w^*(t_1^{(l)}),\ldots,w^*(t_{2^l+1}^{(l)}))\in B_l\quad,\ \forall\ l\quad,$$

所以我們已證明了 $\bigcap_{l\geq n_0} C_l \neq \phi$ 。 #

【定義 2.2】

由定理 2.1 所保證的，在 $(\mathscr{C},\mathscr{B})$ 上存在且唯一的測度 μ^w 稱為Wiener 測度。

【註記1】 雖然由Kolmogorov 延拓定理的一般建構可以在空間 $\mathbf{R}^{[0,\infty)}$ 上引入Brown 運動的分佈，但是由定理 2.1 可知，只要對 $\{W(t)\}$ 取適當的修飾，則其分佈可擔台於 $\mathscr{C}$ 上。因此 $(\mathscr{C},\mathscr{B})$ 上的測度 μ^w 可看作是一個Brown 運動的分佈。換言之，對殆遍的 ω，樣本路徑 $W(\cdot,\omega)$是連續函數。下一節我們將討論Brown運動更確切的樣本路徑之行為。

【註記2】 就作者所知，N. Wiener 是第一位在連續函數空間上引入Gauss 測度的人，因此我們稱 μ^w 為Wiener 測度是合宜的。順便提一下，Wiener 本人稱測度空間 $(\mathscr{C},\mathscr{B},\mu^w)$ 為“微分空間”(differential space)，這個名稱是由$W(t)$之加性得來的。此術語的一個有趣對照：對於殆遍的樣本路徑是到處不可微分的（見下節[1]）。

對於不必是Gauss 型的一般隨機過程 $\{X(t): t\in T\}$，如果它滿足下面條件：

存在常數 $\alpha>0$，$\beta>1$ 使得對某常數 $C>0$ 恆有

$$E\{|X(t)-X(s)|^\alpha\}\leq C|t-s|^\beta,\qquad t,s\in T, \tag{2.8}$$

那麼對此過程取適當的修飾，可使其分佈的擔台為 $\mathscr{C}(T)$ [Kolmogorov-Prokhorov；參見Yu.V. Prokhorov（1956）及（2.7）]這就是第 1.3 節[2]中所述的有關隨機過程的擔台這類問題的一個結果。

現在來簡略討論高維度的Brown 運動。

【定義 2.3】

考慮定義在機率空間 $(\Omega,\mathbf{B},P)$ 上的一族向量值隨機變數 $\{W(t,\omega)=(W_1(t,\omega),W_2(t,\omega),\cdots,W_N(t,\omega)): t\geq 0\}$ 如果

(a) 每個分量 $\{W_i(t,\omega): t\geq 0\}$ 都是（一維的）Brown 運動；並且

(b) $\{W_i(t,\omega): t\geq 0; i=1,2,\cdots,n\}$ 是一族獨立的隨機過程；則稱 $\{W(t,\omega): t\geq 0\}$ 爲一個 n 維Brown運動。

仿照定理2.1，我們可以預期 n 維 Brown 運動的分佈，其擔台爲空間 $\mathscr{C}([0,\infty),\mathbf{R}^n)$。我們稱這個分佈爲（$n$ 維）Wiener 測度。許多有關樣本路徑的性質之研究可以化約成一維的情形來探討。雖然維數對於 Brown 運動的泛函之解析研究（本書的主題）不太有關係，但是當我們把Brown 運動看作是Markov過程來研究時，會發現有一些現象（第2.4－6節）在高維的情形更有趣，也更能獲得豐富的結果。例如，當Brown運動局限在空間某一領域時，我們可以談論它在邊界上以及靠近邊界的行爲，這種研究顯示出它跟分析學如位勢理論或偏微分方程論具有密切關係。這些問題在高維的情形更有趣，詳細情形可以在一些著名的書中找到，例如W. Feller (1971) 及K. Itô & H. P. Mckean (1965)。我們把這兩本書推薦給讀者。

Brown運動另一個方向的推廣是，讓時間參數 t 取值於 $\mathbf{R}^n$，或者Riemann空間，例如一球面。有關多參數Brown運動的簡介，可在附錄第A.2節中找到。

2-2 樣本路徑的性質

在上一節裡我們已看到，對殆遍的 ω，Brown運動的樣本路徑 $t\to W(\cdot,\omega)$，$t\geq 0$，是連續的。我們自然要進一步追究，Brown 樣本路徑的更精細性質，諸如可微分性，當 $t\to\infty$ 時的漸近行爲等等。這一節我們就來研究這些問題，並且展示這個領域中一些標準的結果。

[1] 不可微分性

首先我們敍述出結果。

【定理 2.2】

一個Brown運動 $\{W(t,\omega): t\geq 0\}$ 幾乎所有（即殆遍）的樣本路徑到處都不可微分。

【觀察】 在給出證明之前，我們先展示隱藏在背後的想法。對於很小的

$h>0$，增分 $W(t+h)-W(t)$ 爲Gauss隨機變數，平均值爲 0，方差爲 h，因而 $h^{-1/2}[W(t+h)-W(t)]$ 爲一標準的Gauss隨機變數（即平均值爲 0，方差爲 1）。所以不論 $h>0$ 多麼小，$h^{-1/2}[W(t+h)-W(t)]$ 可看作是具有普通大小的量。今若考慮商 $h^{-1}[W(t+h)-W(t)]$，令 $h\to 0$，我們發現其方差變得任意大，所以對每個 ω 我們不能希望極限存在，故 $W(t,\omega)$ 對時間不可微分。

【定理2.2的證明】 由命題2.1[1] A 可知，只要證明 t 在 $[0,1]$ 上變動的情形就好了。於是我們可利用Dvoretzky，Erdös與Kakutani的方法。

假設 $W(t,\omega)$ 在某一點 $s\in[0,1)$ 可微分。因爲 $W(t,\omega)$ 在 s 點右可導微，故存在 $\varepsilon>0$ 及整數 $l\geq 1$ 使得當 $0<t-s<\varepsilon$ 時，我們有

$$|W(t,\omega)-W(s,\omega)|<l(t-s).$$

今取整數 n 及 $i=[ns]+1$，再令 j 逐次取値 $i+1$，$i+2$，$i+3$（見圖 3），則由上述不等式得到

$$\left|W\left(\frac{j}{n},\omega\right)-W\left(\frac{j+1}{n},\omega\right)\right|<\frac{7l}{n}, j=i+1, i+2, i+3, \tag{2.9}$$

由下面的計算，我們可看出爲什麼要取 j 爲三個連續整數。

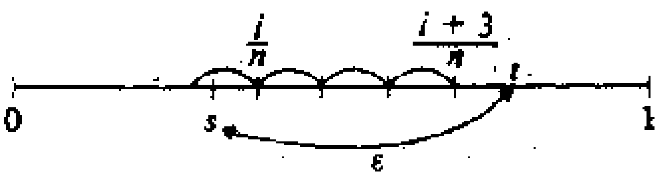


圖 3

令 $A^{i,j}_{l,n}$ 爲滿足（2.9）的所有 ω 所成的集合，顯然它是一個B可測集。考慮下面的B可測集

$$A=\bigcup_{l\geq 1}\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m}\bigcup_{0<i\leq n}\bigcap_{i<j\leq i+3}A^{i,j}_{l,n}. \tag{2.10}$$

這個事件表示：存在整數 l 使得對所有足夠大的 n 及某點 i/n，不等式

(2.9)成立。於是A包含使得$W(\cdot,\omega)$在某一點t是可導微的所有ω，故只要證明$P(A)=0$就好了。爲此，我們注意到

$$
\begin{aligned}
&P\left(\bigcap_{n\geq m}\bigcup_{0<i\leq n}\bigcap_{i<j\leq i+3}A_{l,n}^{(j)}\right)\\
&\leq \liminf_{n\to\infty} nP\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right|<\frac{7l}{n}\right)^3\\
&=\liminf_{n\to\infty} nP\left(|W(1)|<\frac{7l}{\sqrt{n}}\right)^3\\
&\leq \lim_{n\to\infty} n\left\{(2\pi)^{-1/2}\frac{14l}{\sqrt{n}}\right\}^3=0.
\end{aligned}
$$

因此集A爲可列多個零測集的聯集，從而A也是零測集。 #

[2] 二階變差(The second variation)

對於固定的ω，我們將定義連續函數$W(t,\omega)$，$0\leq t\leq 1$，的(一階)變差及二階變差，這些可用來研究Brown樣本路徑在時間推移下的振動起伏行爲。

爲了引進變差概念，必須介紹一些記號。令$f(t)$爲一通常的函數並且令$\pi=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$；$0=t_0\leq t_1<\cdots\leq t_n$，表示單位區間$[0,1]$的分割，分成子區間$[t_j,t_{j+1}]$，$0\leq j\leq n$。定義$\pi^k f$，$k>0$，與$\delta\pi$爲

$$
\pi^k f=\sum_{j=0}^{n-1}|f(t_{j+1})-f(t_j)|^k,\qquad k>0,
$$

$$
\delta\pi=\max_{0\leq j<n}|t_{j+1}-t_j|.
$$

今取一列逐漸加細的分割π_n，$n\geq 0$：

$$
\pi_0=\{0,1\}\subset\pi_1\subset\pi_2\subset\cdots. \tag{2.11}
$$

如果極限

$$
\lim_{n\to\infty}\pi_n^k f=V^k(f)
$$

存在，則$V^k(f)$稱爲f關於$\{\pi_n\}$的**k階變差**（variation of f of order k）。

回到Brown樣本路徑$W(t,\omega)$，$0\leq t\leq 1$，我們證明P. Lévy（1940）最先指出的有關變差的一個結果。

【定理2.3】

令$\{\pi_n: n\geq 0\}$爲區間$[0,1]$的一列分割滿足（2.11），則

1. 對殆遍的ω，極限

$$\lim_{n\to\infty}\pi_n^2 W(\cdot,\omega)=V^2(\omega) \tag{2.12}$$

存在且爲有窮值；

2. 如果，$\{\pi_n\}$進一步滿足條件

$$\lim_{n\to\infty}\delta\pi_n=0,$$

則我們也有

$$V^2(\omega)=1,\qquad \text{a.e.} \tag{2.13}$$

在證明這個定理之前，我們先引進**平賭過程**（martingale）的概念，然後敍述出一個極限定理，作爲證明的一個工具。

令N表所有正整數集N^+或所有負整數集N^-，我們假設$\{X_n: n\in N\}$爲機率空間$(\Omega,\mathbf{B},P)$上的一個隨機過程。再設$\mathbf{B}_n$，$n\in N$，爲一列遞增的子σ體（$\subseteq\mathbf{B}$），如果$\{X_n,\mathbf{B}_n: n\in N\}$滿足下列條件：

(a) X_n爲$\mathbf{B}_n$可測，$\forall n\in N$；

(b) $E(|X_n|)<\infty$，$\forall n\in N$；

(c) $E(X_n|\mathbf{B}_m)=X_m$ a.e. $\forall n\geq m$；

則稱爲一個**平賭過程**。

仿上述也可定義具有連續時間參數的平賭過程，記爲$\{X(t),\mathbf{B}(t): t\in T\}$，其中$T$取爲$[0,\infty)$，$(-\infty,\infty)$或$(-\infty,0]$。

【註記】 回想第1.4節例1所引入的序列S_n，我們可以證明$\{S_n,\mathbf{B}_n\cdot$

: $n \in N^{+}\}$ 爲一個平賭過程的例子。

下面的補題是J. L. Doob的結果，其證明及相關的結果可參看附錄第A.1節及Doob (1953) 第VII章第4節。

【補題2.2】

1. 設 $\{X_n, \mathbf{B}_n : n \in \mathbf{N}^{+}\}$ 爲一個平賭過程，則 $E(|X_n|)$ 爲非遞減：

$$E(|X_1|) \le E(|X_2|) \le \cdots \le E(|X_n|) \le \cdots$$

如果進一步 $\lim_{n\to\infty} E(|X_n|) = K < \infty$，則

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \equiv X_\infty(\omega)$$

殆遍存在。

2. 對於一個平賭過程 $\{X_n, \mathbf{B}_n : n \in \mathbf{N}^{-}\}$，極限

$$\lim_{n\to-\infty} X_n(\omega) \equiv X_{-\infty}(\omega)$$

殆遍存在，並且如果記，$\mathbf{B}_{-\infty} = \cap_{n\in N^-} \mathbf{B}_n$，則

$$\{X_n, \mathbf{B}_n : n \in N^- \cup \{-\infty\}\}$$

也是一個平賭過程。

【定理2.3的證明】 (a)令 $\{\pi_n : n \ge 0\}$ 爲 $[0, 1]$ 的一個分割序列滿足 (2.11)，並且對 $n \ge 0$ 令

$$V_n^2(\omega) = \pi_n^2 W(\cdot, \omega).$$

我們先證明：對整數 $k > 0$ 與 $k \ge 0$，

$$E(\Delta_1^k W \Delta_2^k W | V_k^2, V_{k+1}^2, \ldots, V_{k+K}^2) = 0. \tag{2.14}$$

其中 Δ_i^k，$i = 1, 2$ 爲 $[0, 1]$ 的子區間且限分割 π_k 的子區間不相同，而 $\Delta_i^k W$ 表示 $W(t)$ 在 Δ_i^k 上的增分。對於任意滿足 (2.11) 的序列 $\{\pi_n : n \ge 0\}$，我們可設其中的分割 π_{k+1} 是將 π_k 的某區間分成兩段而得來的

，因爲如果必要的話，我們可在序列 $\{\pi_n\}$ 中插入新的分割而不影響序列的遞增性。今假設 π_{k+1} 是將 π_k 的某區間分割成子區間 Δ_1^{k+1} 與 Δ_2^{k+1} 而得來的，於是我們有

$$V_k^2 - V_{k+1}^2 = 2\,\Delta_1^{k+1}W\,\Delta_2^{k+1}W. \tag{2.15}$$

仿上述重複 k 次，則（2.14）的左項變成

$$E(\Delta_1^k W\,\Delta_2^k W \mid V_k^2, \Delta_1^{k+1}W\,\Delta_2^{k+1}W, \ldots, \Delta_1^{k+K}W\,\Delta_2^{k+K}W).$$

進一步，V_k^2 可寫成三個獨立隨機變數的和 $V_k^2 = (\Delta_1^k W)^2 + (\Delta_2^k W)^2 + \widetilde{V}_k^2$，所以要證明（2.14）式只要證明

$$E(\Delta_1^k W\Delta_2^k W \mid (\Delta_1^k W)^2, (\Delta_2^k W)^2, \widetilde{V}_k^2, \Delta_1^{k+1}W\,\Delta_2^{k+1}W, \ldots, \Delta_1^{k+K}W\,\Delta_2^{k+K}W) = 0. \tag{2.16}$$

就好了。我們注意到，對於 $0 < j \leq k$，區間 Δ_1^{k+j} 與 Δ_2^{k+j} 同時落在 Δ_1^k 或 Δ_2^k，或兩者皆與 $\Delta_1^k \cup \Delta_2^k$ 互斥。對於後一種情形，$\Delta_1^{k+j}W\Delta_2^{k+j}W$ 可以從上述條件期望式中去掉，因爲它跟 $(\Delta_1^k W, \Delta_2^k W)$ 是獨立的。同理，$\widetilde{V}_k^2$ 也可去掉。這些都去掉後，我們對（2.16）式左邊條件隨機變數所決定的 ω 集合上作積分。因爲在 π_{k+K} 的區間上的增分是獨立的，故積分可利用它們的分佈表成下形

$$\int_A \left(\sum_{i=1}^m x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j\right)(2\pi)^{-(m+n)/2}\left(\prod_i c_i^{-1}\right)\left(\prod_j d_j^{-1}\right)$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \frac{x_i^2}{c_i^2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \frac{y_j^2}{d_j^2}\right] dx_1 \cdots dx_m\, dy_1 \cdots dy_n.$$

在上面的表式中，積分變數 $\{x_i\}$ 與 $\{y_j\}$ 相應於 $W(t)$ 在 π_{k+K} 的分割區間上的增分（分別被包含於 Δ_1^k 與 Δ_2^k），並且 A 爲由二次式 $(\Sigma_i x_i)^2$，$(\Sigma_j y_j)^2$，$x_i x_{i'}$，$y_j y_{j'}$ 等等所決定的 $\mathbf{R}^{m+n}$ 的子集。因爲集 A 在 $\{x_i\}$ 同時變號之下不變，而被積分項要變號，故積分值必爲 0。這就證明了（2.16）式，因而證明了（2.14）式。

由（2.15）式我們得知，對任意 k，

$$E(V_k^2 \mid V_{k+1}^2, V_{k+2}^2, \ldots, V_{k+K}^2) = V_{k+1}^2, \qquad k \geq 0$$

因此令$K\to\infty$得

$$E(V_k^2\mid V_{k+1}^2,V_{k+2}^2,\ldots)=V_{k+1}^2.$$

今令$X_n=V_{-n}^2$，$n\in\mathbf{N}^-$，並且$\mathbf{B}_n$爲由X_k，$k\leq n$所產生的σ體，則上一等式告訴我們$\{X_n,\mathbf{B}_n:n\in\mathbf{N}^-\}$爲一個平賭過程。由補題2.2(2)得知，下式極限殆遍存在：

$$\lim_{n\to-\infty}X_n(\omega)=\lim_{k\to\infty}V_k^2(\omega)=V^2(\omega).$$

這就證明了定理2.3(1)的斷言。

(b)　假設分割π_n由點集$\{t_j\}$所定出，則我們有

$$E\{V_n^2\}=\sum_j E((\Delta_jW)^2)=\sum_j(t_{j+1}-t_j)=1,$$

其中$\Delta_jW=W(t_{j+1})-W(t_j)$。復次，當$n\to\infty$時

$$\begin{aligned}E[(V_n^2-1)^2]&=\sum_{j,k}E((\Delta_jW)^2(\Delta_kW)^2)-2\sum_j E((\Delta_jW)^2)+1\\&=\sum_{j\neq k}(t_{j+1}-t_j)(t_{k+1}-t_k)+3\sum_j(t_{j+1}-t_j)^2-2+1\\&=1-\sum_j(t_{j+1}-t_j)^2+3\sum_j(t_{j+1}-t_j)^2-1\\&\leq 2\delta\pi_n\sum_j(t_{j+1}-t_j)\\&=2(\delta\pi_n)\to 0\end{aligned}$$

因此我們證明了：在空間$L^2(\Omega,\mathbf{B},P)$中，V_n^2均方收斂到1。另一方面由(a)知，$V_n^2(\omega)$殆遍收斂到$V(\omega)$，因此我們得到

$$V^2(\omega)=1\qquad\text{殆遍}$$

#

將定理2.3中有關$[0,1]$的分割π_n改成$[0,t]$的分割$\pi_n(t)$，其中$\pi_0(t)$定義爲$\{0,t\}$，再令

$$\pi_n(t)^2W(\cdot,\omega)=V_n^2(t,\omega).$$

則我們可以證明：

【推論】 1. 對於殆遍的 ω，極限

$$\lim_{n\to\infty} V_n^2(t,\omega) = V^2(t,\omega) \tag{2.17}$$

存在，並且 $V^2(t,\omega)$ 爲 t 的遞增函數。

2. 如果 $\{\pi_n(t)\}$ 滿足進一步的條件

$$\lim_{n\to\infty} \delta\pi_n(t) = 0,$$

則

$$V^2(t,\omega) = t \quad \text{殆遍。} \tag{2.18}$$

【譯者註記】 L'evy 曾從平賭過程的觀點來刻劃 Brown 運動：$\{W(t):t\geq 0\}$ 爲一個 Boown 運動 $\Leftrightarrow W(0)=0$，(W_t) 爲具有連續路徑的平賭過程並且 $V^2(t,w)=t$，$\forall t$。

爲了要給出 $\{W(t,\omega),\ 0\leq t\leq 1\}$ 的樣本函數，其（一階）變差的結果，我們需要下面補題。它很容易證明，因此我們只敍述而不證明。

【補題 2.3】

令 $\{\pi_n\}$ 爲 $[0,1]$ 的分割序列具有 $\delta\pi_n\to 0$。如果 f 爲 $[0,1]$ 上的有界變差函數，則 $\pi_n^2 f\to 0$。

利用這個補題 2.3，則由定理 2.3(2) 立即可得下面結果：

【定理 2.4】

對於殆遍的 ω，樣本路徑 $t\to W(t,\omega)$ 在 $[0,1]$ 的任何子區間上具無界變差。

【註記】 樣本路徑的不可導微性也可從這個結果看出。

[3] 重複對數法則與樣本路徑的均勻連續性

由命題 2.1(2) 我們知道 Brown 運動過程 $\{W(t,\omega):t>0\}$ 與過程

$\{tW(1/t,\omega):t>0\}$ 具有相同分佈。因爲 $W(0+,\omega)=0$ a.e.，故有 $\lim_{t\downarrow 0} tW(1/t,\omega)=0$ a.e.，於是用 $1/t$ 取代 t，我們得到

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}W(t,\omega)=0, \qquad \text{a.e.} \tag{2.19}$$

A. Khinchine (1933) 給出一個更精細的結果：

【定理 2.5】

對於殆遍的 ω，我們有

$$\limsup_{t\downarrow 0}(2t\log\log t^{-1})^{-1/2}W(t,\omega)=1, \tag{2.20}$$

並且

$$\liminf_{t\downarrow 0}(2t\log\log t^{-1})^{-1/2}W(t,\omega)=-1. \tag{2.21}$$

對於這個定理的證明，平賭過程的工具仍然扮演主要角色。我們介紹平賭過程的一個不等式，這是Tehebychev 與Kolmogorov 不等式的推廣。

【補題 2.4】 (Doob不等式)

設 $\{X_n, \mathbf{B}_n: n\in \mathbf{N}^+\}$ 爲一個平賭過程，則對任意 $\lambda>0$ 我們有

$$P\left(\max_{k\le n} X_k\ge\lambda\right)\le \lambda^{-1}E(X_n^+), \tag{2.22}$$

其中 $X_n^+=X_n\vee 0$。

這個結果的證明可以在附錄A 第 1 節裡找到；也可參見Doob (1953) 第VII 章，定理 3.2。

【註記】 如果 $\{X_n, \mathbf{B}_n: n\in\mathbf{N}\}$ 滿足平賭過程的定義中之(a)，(b)兩個條件，而條件(c)改成

$$E(X_n|\mathbf{B}_m)\ge X_m \quad \text{a.e.}, \qquad \forall\ n\ge m. \tag{c'}$$

也成立，則稱 $\{X_n, \mathbf{B}_n: n\in\mathbf{N}\}$ 爲一個劣賭 (submartingale)。不等式 (2.22) 對於劣賭也成立。同理，對於具連續參數的平賭 $\{X(t)$，

$\mathbf{B}_t : t \geq 0\}$，如果殆遍的樣本路徑也是連續的，則不等式

$$P\left(\max_{s\leq t} X(s) \geq \lambda\right) \leq \lambda^{-1}E(X(t)^{+}) \tag{2.23}$$

成立。

【定理2.5的證明】［H.P.Mckean Jr.(1969)］。令 $\mathbf{B}_t$ 爲隨機變數 $B(s)$，$s \leq t$，所產生的 σ 體，並且對於實常數 a，令

$$X(t,\omega) = \exp\left\{aB(t,\omega) - \frac{1}{2}a^2t\right\}, \qquad t \geq 0. \tag{2.24}$$

然則每個 $X(t)$ 爲 $\mathbf{B}_t$ 可測，並且可積分，因爲

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= \exp\left[-\frac{1}{2}a^2t\right](2\pi t)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[ax] \cdot \exp\left[\frac{-x^2}{2t}\right] dx \\ &= 1 \ \forall \text{實數 } a \end{aligned}$$

對於 $t > s$，$X(t)$ 可寫成

$$X(t) = X(s)\exp\left\{a(W(t) - W(s)) - \frac{1}{2}a^2(t-s)\right\},$$

並且因爲 $W(t) - W(s)$ 獨立於任何 $\mathbf{B}_s$ 可測的隨機變數，並且跟 $W(t-s)$ 具有相同的分佈，於是我們得到

$$\begin{aligned} E(X(t) \mid \mathbf{B}_s) &= X(s)E\left\{\exp\left[aW(t-s) - \frac{1}{2}a^2(t-s)\right]\right\} \\ &= X(s). \end{aligned}$$

因此我們已證明了 $\{X(t), \mathbf{B}_t : t \geq 0\}$ 爲一個平賭過程。

今取正的常數 b，利用補題 2.4 得

$$\begin{aligned} P\left(\max_{s\leq t}\left\{W(s) - \frac{1}{2}as\right\} \geq b\right) &= P\left(\max_{s\leq t} X(s) \geq \exp(ab)\right) \\ &\leq \exp[-ab]E(X(t)) \\ &= \exp[-ab]. \end{aligned}$$

令 $h(t)=(2t\ \log\ \log\ t^{-1})^{1/2}$ ，取常數 $0<\theta<1$ 且 $\delta>0$ 。再取上述的常數 a ，b 及時間 t ，使得 $a_n=(1+\delta)\theta^{-n}h(\theta^n)$ ，$b_n=\frac{1}{2}h(\theta^n)$ 且 $t_n=\theta^{n-1}$ 。我們可利用等式

$$a_n b_n=\frac{1}{2}(1+\delta)\theta^{-n}[h(\theta^n)]^2=(1+\delta)\log\log\theta^{-n}$$

以及

$$\exp(-a_n b_n)=(\log\theta^{-1})^{-1-\delta}n^{-1-\delta}$$

來證明

$$\sum_n P\left(\max_{s\le t_n}\left\{W(s)-\frac{1}{2}a_n s\right\}\ge b_n\right)<\infty.$$

因此由 Borel-Cantelli 補題的第一部份得

$$P\left(\max_{s\le t_n}\left\{W(s)-\frac{1}{2}a_n s\right\}<b_n \text{ 對有限多個 } n \text{ 除外的所有 } n\right)=1.$$

從而，對殆遍的 ω ，存在 $n(\omega)$ 使得對任意 $n\ge n(\omega)$ 及 t ，$t_{n+1}<t<t_n$ ，我們有

$$\begin{aligned}W(t,\omega)\le\max_{s\le t_n}W(s,\omega)&<\frac{1}{2}a_n t_n+b_n=\left\{\frac{1+\delta}{2\theta}+\frac{1}{2}\right\}h(\theta^n)\\&<\left\{\frac{1+\delta}{2\theta}+\frac{1}{2}\right\}h(t_n).\end{aligned}$$

令 $\theta\to1$ 且 $\delta\to0$ ，得到不等式

$$\limsup_{t\downarrow0}\frac{W(t,\omega)}{h(t)}\le1. \tag{2.25}$$

下面我們證明反過來的不等式

$$\limsup_{t\downarrow0}\frac{W(t,\omega)}{h(t)}\ge1. \tag{2.26}$$

如前述，令 $0<\theta<1$ 。再令

$$A_n=\{\omega: W(\theta^n,\omega)-W(\theta^{n+1},\omega)\geq(1-\theta^{1/2})h(\theta^n)\},$$

顯然這是一列獨立事件。由週知的有關Gauss分佈函數的不等式

$$(2\pi)^{-1/2}(a^{-1}-a^{-3})\exp\left(-\frac{1}{2}a^2\right)$$
$$<(2\pi)^{-1/2}\int_a^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx<(2\pi)^{-1/2}a^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}a^2\right) \quad (2.27)$$

對所有 $a>0$ 皆成立，我們得到

$$P(A_n)=(2\pi)^{-1/2}\int_{(1-\theta^{1/2})h(\theta^n)/(\theta^n-\theta^{n+1})^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$
$$>c(\log n)^{-1/2}n^{-(1-2\theta^{1/2}+\theta)/(1-\theta)},$$

c 爲一正數。再由不等式 $(1-2\theta^{1/2}+\theta)/(1-\theta)<1$ 證得 $\Sigma_n P(A_n)=\infty$，於是由Borel-Cantelli補題的第二部分得知

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=1.$$

但這表示對於無窮多的整數 n，我們有

$$W(\theta^n,\omega)\geq(1-\theta^{1/2})h(\theta^n)+W(\theta^{n+1},\omega).$$

今我們在上述已證明了：對於從某數之後的所有整數 n，$W(\theta^{n+1},\omega)<2h(\theta^{n+1})$。因爲 $W(t,\omega)$ 的分佈是對稱的，故對足夠大的所有 n 我們也有 $W(\theta^{n+1},\omega)>-2h(\theta^{n+1})$，因此對無窮多的 n，

$$W(\theta^n,\omega)>(1-\theta^{1/2})h(\theta^n)-2h(\theta^{n+1})$$
$$>(1-\theta^{1/2}-3\theta^{1/2})h(\theta^n)$$

今 $\theta\to0$，我們得到（2.26）式。 #

下一個結果是命題 2.1(1) A以及 $\{W(a+h)-W(a): h\geq0\}$ 與 $\{W(a-h)-W(a): h\geq0\}$ 在 $h=0$ 附近具有相同分佈這兩個事實的推

論。

【推論1】 對於殆遍ω，我們有

$$\limsup_{h\to 0}\,(2|h|\log\log|h|^{-1})^{-1/2}[W(a+h,\omega)-W(a,\omega)]=1, \tag{2.28}$$

以及

$$\liminf_{h\to 0}\,(2|h|\log\log|h|^{-1})^{-1/2}[W(a+h,\omega)-W(a,\omega)]=-1. \tag{2.29}$$

這個結果顯示出所謂的Brown樣本路徑的局部連續性。另外還有一個路向是處理在有限區間上的均勻連續性，這在下面定理2.6討論。但是在作這個討論之前，我們再給出定理2.5的一個推論，探討有關Brown樣本路徑當$t\to\infty$時的漸近行爲。

【推論2】 對於殆遍ω，我們有

$$\limsup_{t\to\infty}\,(2t\log\log t)^{-1/2}W(t,\omega)=1. \tag{2.30}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\,(2t\log\log t)^{-1/2}W(t,\omega)=-1. \tag{2.31}$$

這個結果也可由過程$\{W(t,\omega):t>0\}$與$\{tW(1/t,\omega):t>0\}$具有相同分佈的事實來證明。

上述所得(2.20)，(2.21)，(2.28)，(2.29)，(2.30)及(2.31)諸結果，通常叫做**重複對數法則**(the law of the iterated logarithm)。

【註記】 在定理2.4的證明中，由公式(2.24)所定義的平賭過程$X(t)$，事實上是利用Hermite多項式的母函數定義出來的[見附錄A第5節[1]]，其中變數x與參數t分別取爲$W(t,\omega)/\sqrt{2t}$與$a\sqrt{t/2}$。這一類Brown運動的泛函非常重要，以後我們經常會用到。

今討論Brown樣本路徑的均勻連續性。我們假設時間變數t的變化範圍爲[0，1]。

【定理 2.6】 [P.Lévy (1937)]

假設 $c>1$ 爲一常數，則對於殆遍的 ω，存在 $\delta=\delta(\omega)>0$ 使得當 $|t-t'|<\delta$ 時，我們有

$$|W(t,\omega)-W(t',\omega)|\le c[2|t-t'|\log|t-t'|^{-1}]^{1/2}. \tag{2.32}$$

【證明】 令 $h=1/n$，因爲 $W(t+h)-W(t)$ 爲 Gauss 型隨機變數，平均值爲 0，方差爲 h，所以由 (2.27) 式的第二個不等式得到：對於足夠大的 n，

$$\begin{aligned}\alpha_n &\equiv P(|W(t+h)-W(t)|>c(2h\log h^{-1})^{1/2})\\ &=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_{c(2\log n)^{1/2}}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx\\ &<c^{-1}(\pi\log n)^{-1/2}n^{-c^2}.\end{aligned}$$

在 n 個 $W((k+1)h)-W(kh)$，$k=0,1,\cdots,n-1$ 中至少有一個增分大於 $c(2h\log h^{-1})^{1/2}$ 的絕對值，其機率至多爲 $n\alpha_n$。考慮特殊的情形 $n=2^p$，我們得到

$$\begin{aligned}\sum_p 2^p\alpha_{2^p} &<\sum_p 2^p(c^2\pi\log 2)^{-1/2}p^{-1/2}2^{-c^2p}\\ &=(c^2\pi\log 2)^{-1/2}\sum_p p^{-1/2}2^{(1-c^2)p}<\infty.\end{aligned}$$

由 Borel-Cantelli 補題的第一部分我們得知，對殆遍 ω，存在一個整數 $p_0=p_0(\omega)$ 使得當 $p>p_0$ 時，

$$|W((k+1)h,\omega)-W(kh,\omega)|\le c(2h\log h^{-1})^{1/2},\qquad h=2^{-p}. \tag{2.33}$$

這證明：當 t 與 t' 分別形如 $(k+1)2^{-p}$ 與 $k2^{-p}$，$k=0,1,\cdots,2^p-1$ 時，不等式 (2.32) 成立。

今考慮這種情形：$t=q2^{-p}$ 與 $t<t'<t+2^{-p}$，某 $p>p_0$。對 $t'-t$ 作二進位展開：

$$t'-t=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu 2^{-p-\nu},\qquad \varepsilon_\nu=0\ \text{或}\ 1,$$

則由不等式（2.33）得到

$$|W(t',\omega)-W(t,\omega)|\le c\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu\{2(p+\nu)\log 2\}^{1/2}2^{-(p+\nu)/2}.$$

令 ν_0 表示使得 $\varepsilon_\nu=1$ 的最小整數 ν，再令 $\nu=\nu_0+\nu'-1$，則由 $p+\nu\le(p+\nu_0)\nu'$ 得到

$$|W(t',\omega)-W(t,\omega)|\le c\{2(p+\nu_0)\log 2\}^{1/2}2^{-(p+\nu_0)/2}\sum_{\nu'=1}^{\infty}(2\nu')^{1/2}2^{-\nu'/2}$$
$$=cA\{2(p+\nu_0)\log 2\}^{1/2}2^{-(p+\nu_0)/2},\qquad A>1.$$

函數 $h\log h^{-1}$ 在區間（0，e^{-1}）上是遞增的，介乎 $2^{-p-\nu_0}$ 與 $t'-t$ 之間，因此下式對某 $c'>1$ 成立：

$$|W(t',\omega)-W(t,\omega)|<c'\{2|t'-t|\log|t'-t|^{-1}\}^{1/2}\tag{2.34}$$

同理，在 $t=q2^{-p}$ 及 $t>t'>t-2^{-p}$ 的情形，我們也可以證明（2.34）式成立。

進一步，若 t 與 t' 形如 $q2^{-p}$ 與（$q+\nu$）2^{-p}，$1\le\nu\le N$，N 固定，則同理也可證明（2.33）式。亦即，對殆遍的 ω，存在一整數 $p=p_1(\omega)$ 使得當 $p>p_1$ 時，我們有

$$|W((q+\nu)2^{-p},\omega)-W(q2^{-p},\omega)|<c''(2h_\nu\log h_\nu^{-1})^{1/2},\ h_\nu=\nu 2^{-p}\tag{2.33'}$$

其中 $c''>1$。

最後，考慮 t 與 t' 為任意但足夠接近的情形。我們可設 $t'>t$，並且對某 N

$$N2^{-p-1}<t'-t\le N2^{-p},\qquad p>\max\{p_0,p_1\}.$$

然則，存在 q，q' 使得

$$q2^{-p}<t\le t_1=(q+1)2^{-p}<t_1'=q'2^{-p}\le t'<(q'+1)2^{-p},$$

其中 $\frac{1}{2}N-1<q'-q<N+1$。取不等式

$$|W(t', \omega) - W(t, \omega)| \leq |W(t', \omega) - W(t_1', \omega)| + |W(t_1', \omega) - W(t_1, \omega)| + |W(t_1, \omega) - W(t, \omega)|$$

再取正數 ε ，c' ，c'' 與N使得$c = 1 + 2\varepsilon$ ，$c'' = 1 + \varepsilon$ 與$N \geq 16c'^2\varepsilon^{-2}$ 。如前述，數 $p_0(\omega)$ 與 $p_1(\omega)$ 足夠大。因爲 $h \log h^{-1}$ 對於 h 很小的情形是遞增，故由不等式（2.33′）可得

$$|W(t_1', \omega) - W(t_1, \omega)| < (1 + \varepsilon)\{2|t' - t|\log|t' - t|^{-1}\}^{1/2}.$$

復次，由（2.34）得

$$\begin{aligned} &|W(t', \omega) - W(t_1', \omega)| + |W(t_1, \omega) - W(t, \omega)| \\ &\qquad < 2c'(2 \cdot 2^{-p} \log 2^p)^{1/2} \\ &\qquad < 2c'\{4|t' - t|N^{-1} \log(N|t' - t|^{-1})\}^{1/2}. \end{aligned}$$

因爲我們可設 $|t' - t| < N^{-1}$ ，上式最後一項小於

$$4c'\{2|t' - t|N^{-1} \log|t' - t|^{-1}\}^{1/2} < \varepsilon\{2|t' - t|\log|t' - t|^{-1}\}^{1/2}.$$

把這些不等式合在一起，證明就完成了。

自從 1937 年後有許多作者改進了Lévy原來的定理，特別地我們要提到鍾開萊，Erdös 及 Sirao 在 1959 年得到的有關Brown樣本路徑的均勻連續性之決定性結果。同理，對於局部連續性也得到了漂亮的和決定性的結果，但是若要講這些，即使只敍述出結果，也必須作許多預備工作，故只好從略。

在結束本節之前，我們要指出：有關Gauss過程的樣本路徑的連續性，甚至在今日還正在被探討着，而且這個領域也不斷地提供有趣的研究論題。

2-3 Wiener過程的建構

本節我們要用兩種不同的方法在機率空間（Ω，B，P）上建構Wiener過程。其一是由P. Lévy 提出的，利用一個逼近過程序列來建造Wiener

過程；另一種方法是R.E.A.C.Paley與N.Wiener所提出的，利用Fourier級數展開法。每一種方法都可看作是對Wiener過程的一種描述，反應着Wiener過程的某些重要性質。

[1] P.Lévy 方法（1948，§1）

在給出詳細建構之前，我們先指出隱藏在建構概念背後的重要性質。令$\{W(t,\omega): t\geq 0\}$爲$(\Omega, \mathcal{B}, P)$上的Wiener過程。

【命題 2.2】

對於有限區間(a,b)中的每個t而言，$W(t)$可代表成如下之形：

$$W(t) = \mu(t) + \sigma(t)X(t) \tag{2.35}$$

其中

$$\mu(t) = (b-a)^{-1}\{(b-t)W(a) + (t-a)W(b)\}, \tag{2.36}$$

$X(t)$爲一標準Gauss隨機變數獨立於$\{W(s): s\in[0,a]\cup[b,\infty)\}$，並且$\sigma(t)$定義爲

$$\sigma^2(t) = \frac{(t-a)(b-t)}{b-a} \tag{2.37}$$

【證明】 因爲$\{W(t): t\geq 0\}$爲Gauss型系統，故可利用第1.6的結果。

我們先證明(2.36)中的$\mu(t)$就是條件期望$E(W(t)\mid W(s), s\in[0,a)\cup[b,\infty))$。顯然$\mu(t)$爲$W(s)$，$s\in[0,a]\cup[b,\infty]$，的函數，並且我們知道$\{W(t): t\geq 0\}$爲Gauss型系統，期望值爲0。由命題1.10(b)知，只要證明：對任意$s\in[0,a]\cup[b,\infty)$

$$E[(W(t)-\mu(t))W(s)] = 0$$

就好了。由直接計算可得左邊等於$s-(b-t)s/(b-a)-(t-a)s/(b-a)$，或$t-(b-t)a/(b-a)-(t-a)b/(b-a)$，端視$s<a$或$s>b$而定；馬上看出兩者的值皆等於0。因此$\mu(t)$爲所欲的條件期望，

於是$W(t)-\mu(t)$獨立於$\{W(s): s\in[0,a]\cup[b,\infty)\}$。再計算$W(t)-\mu(t)$的方差，我們就得到(2.37)式。 #

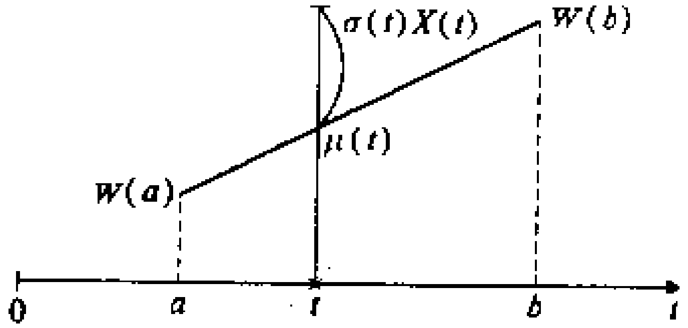


圖4

這個命題的內容可以表述如下：給時間區間(a,b)之外的$W(t)$,則$W(t)$在(a,b)內的點t所取的值可經由在$W(a)$與$W(b)$之間作線性插值，再加上一個獨立量$\sigma(t)X(t)$而得到，其中$\sigma(t)$由(2.37)式所定義並且$X(t)$為標準Gauss隨機變數；見圖4。

命題2.2的證明過程，我們可得下面的結果。

【推論】 在$W(t)$的分解公式(2.35)中$(a<t<b)$，$\mu(t)$可以表爲如下的條件期望

$$\mu(t)=E(W(t)|W(a),W(b)). \tag{2.38}$$

有了命題2.2的啓發，我們現在來講Wiener過程的Lêvy建構法。先由時間區間爲$[0,1]$的情形說起。

考慮定義在機率空間$(\Omega,\mathcal{B},P)$上獨立的標準Gauss隨機變數序列$\{Y_n(\omega): n\geq 1\}$。(這是存在的！)令T_n表所有形如$k/2^{n-1}$，$k=0,1,\cdots,2^{n-1}$，$n\geq 1$的二進位數，再令$T_0=\cup_{n\geq 1}T_n$。

我們定義Gauss過程$\{X_1(t,\omega): t\in[0,1]\}$爲

$$X_1(0,\omega)=0$$
$$X_1(1,\omega)=Y_1(\omega)$$
$$X_1(t,\omega)=tY_1(\omega), \qquad t\notin T_1,$$

然後就可遞迴地定義序列 $\{X_n(t): t\in[0,1]\}$，$n\geq 1$，如下：假設 $\{X_n(t): t\in[0,1]\}$ 已定義好了，則定義 $\{X_{n+1}(t): t\in[0,1]\}$ 爲

$$X_{n+1}(t,\omega)=\begin{cases} X_n(t,\omega), & t\in T_n;\\ \frac{1}{2}[X_n(t+2^{-n},\omega)+X(t-2^{-n},\omega)]+2^{-(n+1)/2}Y_k(\omega), & \\ & t\in T_{n+1}\setminus T_n;\\ 2^n((k+1)2^{-n}-t)X_{n+1}(k2^{-n},\omega) & \\ \quad +2^n(t-k2^{-n})X_{n+1}((k+1)2^{-n},\omega), & \\ & t\in[k2^{-n},(k+1)2^{-n}];\end{cases}$$

其中在中間式的整數 k 由式子 $k=k(t)=2^{n-1}+\frac{1}{2}(2^nt-1)$，$t\in T_{n+1}/T_n$ 所決定。

如果 t 局限於集 T_n，則 $\{W(t): t\in T_n\}$ 與 $\{X_n(t): t\in T_n\}$ 具有相同的分佈；事實上，兩者的協變異函數相同。於是我們可以預期 Gauss 過程序列 $\{X_n(t): t\in[0,1]\}$，$n\geq 1$，在某些意味之下收斂到 Wiener 過程。

取一點 $t\in T_0$，由 $X_n(t)$ 的定義可知，存在一個數 $N=N(t,\omega)$ 使得對每個 $n>N$，我們有 $X_n(t,\omega)=X_N(t,\omega)$。因此，如果我們將 $X_n(t)$ 看作 $L^2(\Omega,\mathrm{B},P)$ 的元素，我們就得到均方極限 $\lim_{n\to\infty}X_n(t)$。今因 $E[|X(t)-X(t')|^2]\leq|t-t'|$，$t,t'\in T_0$，故 $\{X(t): t\in T_0\}$ 可看作是 T_0 上的均勻連續函數，取值於 $L^2(\Omega,\mathrm{B},P)$。於是我們可以將它延拓成連續函數 $\{X(t): 0\leq t\leq 1\}$。由建構知道必爲 Gauss 型。因爲 $X_n(t)$ 由逐步插值獨立的 Gauss 隨機變數而得，故對任何 $t\in[0,1]$，必有

$$\lim_{n\to\infty} X_n(t)=X(t) \quad 於 \quad L^2(\Omega,\mathrm{B},P).$$

進一步我們有

$$E(X(t))=0, \qquad E(X(t)X(s))=t\wedge s,$$

從而我們已證明 $\{X(t,\omega): t\in[0,1]\}$ 爲一個 Wiener 過程。

剛剛證明的 $\{X(t,\omega):t\in[0,1]\}$ 之收斂到Wiener過程並不保證其樣本函數序列 $X_n(\cdot,\omega)$ 之收斂，但是下面的補題解決了這個問題。

【命題 2.3】

對於殆遍的 ω，極限

$$\lim_{n\to\infty} X_n(t,\omega)=\bar{X}(t,\omega) \tag{2.39}$$

存在，且 $\bar{X}(t,\omega)$，$0\le t\le 1$，爲一連續函數。

【證明】 首先令

$$Z_n(t,\omega)=X_{n+1}(t,\omega)-X_n(t,\omega).$$

顯然，當 $t\in T_n$ 時，$Z_n(t,\omega)=0$，且有

$$\max_{0\le t\le 1}|Z_n(t,\omega)|=\max_{2^{n-1}\le k<2^n} 2^{-(n+1)/2}|Y_k(\omega)|.$$

今計算機率

$$\begin{aligned}P_n&=P\left(\max_{0\le t\le 1}|Z_n(t,\omega)|>\lambda_n\right)\\&\le 2^{n-1}P(|Y_k(\omega)|\ge 2^{(n+1)/2}\lambda_n)\\&\le 2^{n-1}(2^n\pi)^{-1/2}\lambda_n^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2}(2^{(n+1)/2}\lambda_n)^2\right]\end{aligned}$$

［由（2.27）的第二個不等式］ (2.27).

取 $\lambda_n=(2cn\log 2)^{1/2}2^{-(n+1)/2}$，其中 $c>1$，我們可以看出

$$\sum_{n\ge 1}P_n<\infty.$$

由第一部分的Borel-Cantelli補題得知，除了有限多個 n（跟 ω 有關）之外，我們有

$$\max|Z_n(t,\omega)|\le(2cn\log 2)^{1/2}2^{-(n+1)/2} \quad \text{殆遍}.$$

由此得到，對殆遍 ω，級數 $\Sigma_n Z_n(t, \omega)$均勻地絕對收斂。這個事實蘊含了(2.39)的極限之存在性。復次，因爲$Z_n(t, \omega)$對 t 連續，故 $\bar{X}(t, \omega)$的連續性亦得證。 #

由前述的討論亦可得到，對固定的 t，我們有

$$\bar{X}(t, \omega) = X(t, \omega) \quad \text{殆遍。}$$

等價地說，$\{\bar{X}(t, \omega): t \in [0, 1]\}$爲Wiener 過程的一個樣板（version）具有殆遍樣本路徑是連續的。這個過程的存在性與第 2.1 節所討論的$\mathscr{C}$上的Wiener 測度是Wiener 過程的分佈這件事當然是一致的。

當時間參數 t 在半線$[0, \infty)$上流動時，我們以如下步驟建構Wiener 過程：首先在同一個機率空間（Ω，B，P）上取兩個獨立的Wiener 過程 $\{X^{(i)}(t): t \in [0, 1]\}$，$i = 1, 2$。這件事可以辦得到：由兩個獨立的標準Gauss隨機變數所組成的系統$\{Y_n^{(i)}(\omega): i = 1, 2, n \geq 1\}$出發，利用$\{Y_n^{(i)}: n \geq 1\}$仿上述作出$X^{(i)}(t)$，$i = 1, 2$。再將此兩Wiener 過程以如下的方法連接起來：

$$W(t, \omega) = \begin{cases} X^{(1)}(t, \omega) & t \in [0, 1] \\ X^{(1)}(1, \omega) + tX^{(2)}(t^{-1}, \omega) - X^{(2)}(1, \omega) & t > 1 \end{cases}$$

由命題 2.1 之(1)知，我們已得到一個Wiener 過程，以$[0, \infty)$的時軸。

[2] Paley-Wiener方法（1934，第IX章）

因爲我們要利用Fourier 展開的技巧，故討論複值函數與複值隨機變數較爲方便。我們要來建構一個複值Wiener 過程。

設$X_k(\omega)$，$Y_k(\omega)$，$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$爲標準Gauss隨機變數所成的獨立序列。定義

$$Z_k(\omega) = 2^{-1/2}(X_k(\omega) + iY_k(\omega)), \qquad i = \sqrt{-1}.$$

每個$Z_k(\omega)$爲複值Gauss隨機變數（見第 6.1 節）且$2^{1/2}Z_k(\omega)$具有標準的兩維Gauss 分佈，此地我們將複數平面看作是兩維的歐氏空間。由定義

知，$Z_k(\omega)$，$k=0$，± 1，± 2，…爲獨立隨機變數具有$P(Z_k)=0$與

$$E(Z_k Z_l)=0,\ E(Z_k \bar{Z}_l)=\delta_{k,l}. \tag{2.40}$$

現在我們考慮t之隨機函數，經過理想化，這意指其値譜［$=2\pi\times$（頻率）］分佈於整個整數集上，並且相應的振幅爲獨立的同佈（$i.i.d.$）隨機變數$Z_k(\omega)$，$k\geq 1$。換言之，我們作出

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k(\omega)e^{ikt}. \tag{2.41}$$

不幸的是，對任意固定的ω，（2.41）式並不收斂，但是我們仍然可以利用對t作逐項積分加以修飾，而得到下面有意義的隨機函數，其中的級數皆收斂：

$$\begin{aligned} Z_1(t,\omega)=tZ_0(\omega)&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_n(\omega)(e^{int}-1)}{in}\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_{-n}(\omega)(e^{-int}-1)}{-in} \end{aligned} \tag{2.42}$$

因爲由（2.40），$\{Z_k\}$構成複Hilbert空間$L_c^2(\Omega, \mathbf{B}, P)$中的么正序列，故（2.42）中的兩個級數皆爲強收斂；事實上兩者的範數皆小於$4\Sigma_n n^{-2}$。

今證明$\{(2\pi)^{1/2}Z_1(t)：t\in[0, 2\pi]\}$爲複值Wiener過程具有參數集$[0, 2\pi]$。

【補題2.5】

對於任意t，$s\in[0, 2\pi]$，我們有下面的等式：

$$\sum_n{}' \frac{(e^{int}-1)(e^{-ins}-1)}{n^2}=\begin{cases} s(2\pi-t), & s\leq t;\\ t(2\pi-s), & t\leq s; \end{cases} \tag{2.43}$$

其中Σ_n'表和$\Sigma_{n=-\infty}^{-1}+\Sigma_{n=1}^{\infty}$。

【證明】 記（2.43）之右項爲$G(t, s)$，故有$G(t, s)=(s\wedge t)\cdot[2\pi-(s\vee t)]$。我們要取$G$作爲一個積分算子之核，而此積分算子作

用於定義在單位圓上的函數空間。固有函數與固有值由公式

$$\lambda \int_0^{2\pi} G(t, s)\varphi(s)\, ds = \varphi(t),$$

求得，或等價地，由微分方程

$$\varphi''(t) = -2\pi\lambda\varphi(t), \qquad \varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0, \tag{2.44}$$

求得。這是週知的方程式，描述單頻振子的運動。

我們也可將（2.43）的左項看作是一個積分核而得到下形的一個積分方程

$$\sum_n{}' \frac{(e^{int}-1)}{n^2} \int_0^{2\pi} (e^{-ins}-1)\varphi(s)\, ds = \lambda^{-1}\varphi(t). \tag{2.45}$$

令 $\int_0^s \varphi(u)\,du = \Phi(s)$，由分部積分公式得

$$\int_0^{2\pi} (e^{-ins}-1)\varphi(s)\, ds = in \int_0^{2\pi} e^{-ins}\Phi(s)\, ds.$$

利用這個公式，我們可以將（2.45）式對 t 作導微得

$$\sum_n{}' \frac{ie^{int}}{n} \cdot in \int_0^{2\pi} e^{-ins}\Phi(s)\, ds = \lambda^{-1}\varphi'(t).$$

將 e^{-ins} 用 $(2\pi)^{-1/2} e^{-ins}$ 取代時，我們發現上式之左項跟 Φ 的 Fourier 展開式（不具常數項者）只差個常數倍（$=-2\pi$）。再對 t 導微一次得到

$$-2\pi\Phi'(t) = \lambda^{-1}\varphi''(t),$$

這和（2.44）一致。

至此我們已證明了（2.44）式，但必須兩邊的項視為 $L^2([0,2\pi]\times[0,2\pi])$ 之函數。我們只要再觀察到，兩邊的項皆為連續函數，這就證明完畢。 #

【命題2.4】

令 $Z(t,\omega)=(2\pi)^{-1/2}Z_1(t,\omega)$，則有

$$E(Z(t))=0 \tag{2.46}$$

且

$$E(Z(t)\overline{Z(s)})=t\wedge s.$$

【證明】 因爲每個 Z_k 的期望值爲 0，故 $E(Z(t))=0$ 是顯然的。再看協變異函數，我們計算如下：

$$\begin{aligned}
E(Z_1(t)\overline{Z_1(s)}) &= ts+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{int}-1)(e^{-ins}-1)}{n^2}\\
&\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{-int}-1)(e^{ins}-1)}{n^2}\\
&= ts+\sum_{n}{}'\frac{(e^{int}-1)(e^{-ins}-1)}{n^2}\\
&= ts+G(t,s)\\
&= \begin{cases}2\pi s & s\le t,\\ 2\pi t & t\le s,\end{cases} \qquad \text{由補題 2.5}\\
&= 2\pi(s\wedge t).
\end{aligned}$$

#

正如〔1〕之建構，我們也有興趣於每一條樣本路徑的構造．故我們現在問：對於一個給定的 ω，(2.42)中的級數是否收斂？爲此我們考慮部分和

$$Z_{m,n}(t,\omega)=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{Z_k(\omega)e^{ikt}}{ik},\qquad m<n,$$

並且證明這方面的第一個結果。

【命題2.5】

對於殆遍的 ω，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}|Z_{2^n,2^{n+1}}(t,\omega)| \tag{2.47}$$

對 t 均勻收斂。

【證明】 我們令記號Re(·)表示實部。計算 $Z_{m,n}(t,\omega)$ 得

$$|Z_{m,n}(t,\omega)|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|Z_k(\omega)|^2}{k^2} + 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{n-m-1} e^{ijt} \sum_{k=m+1+j}^{n} \frac{Z_k(\omega)\overline{Z_{k-j}(\omega)}}{k(k-j)}\right\}$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|Z_k(\omega)|^2}{k^2} + 2\sum_{j=1}^{n-m-1}\left|\sum_{k=m+1+j}^{n} \frac{Z_k(\omega)\overline{Z_{k-j}(\omega)}}{k(k-j)}\right|.$$

令 $T_{m,n}(\omega)=\sup_t|Z_{m,n}(t,\omega)|$，則有

$$E(T_{m,n}^2) = E\left\{\sup_t |Z_{m,n}(t,\omega)|^2\right\}$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} k^{-2} + 2\sum_{j=1}^{n-m-1} E\left(\left|\sum_{k=m+1+j}^{n} \frac{Z_k\bar{Z}_{k-j}}{k(k-j)}\right|\right) \tag{2.48}$$

且

$$E\left\{\left|\sum_{k=m+1+j}^{n} \frac{Z_k\bar{Z}_{k-j}}{k(k-j)}\right|^2\right\}$$

$$= \sum_{k=m+1+j}^{n} E\left(\frac{|Z_k|^2|Z_{k-j}|^2}{k^2(k-j)^2}\right)$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\sum_{m+1+j\leq l<k\leq n} E\left(\frac{Z_k\bar{Z}_{k-j}\bar{Z}_l Z_{l-j}}{k(k-j)l(l-j)}\right) \tag{2.49}$$

$$= \sum_{k=m+1+j}^{n} k^{-2}(k-j)^{-2},$$

第二項的和等於0，因爲 $\{Z_k\}$ 形成獨立序列。對於 $k-j=l$ 的情形，我們必須小心，但因 Z_k 獨立於 $\bar{Z}_{k-j}\,\bar{Z}_l Z_{l-j}$，故有

$$E(Z_k\bar{Z}_{k-j}\bar{Z}_l Z_{l-j}) = E(Z_k)E(\bar{Z}_{k-j}\bar{Z}_l Z_{l-j}) = 0.$$

將(2.49)代入(2.48)並且利用Schwarz不等式 $(E(|X|)^2\leq E(|X|^2))$，我們得到

$$E(T_{m,n}^2) \leq \sum_{k=m+1}^{n} k^{-2} + 2\sum_{j=1}^{n-m-1}\left\{\sum_{k=m+1+j}^{n} k^{-2}(k-j)^{-2}\right\}^{1/2}.$$

$$\le \frac{n-m}{m^2} + 2(n-m)\left\{\frac{n-m}{m^4}\right\}^{1/2}$$

令 $n = 2m$，再利用Schwarz不等式，得到

$$E\left(\sup_t |Z_{m,2m}(t,\omega)|\right) \le E(T^2_{m,2m})^{1/2}$$
$$\le (m^{-1} + 2m^{-1/2})^{1/2} \le 2m^{-1/4}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\sup_t |Z_{2^n,2^{n+1}}(t,\omega)|\right) \le 2\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/4} < \infty,$$

於是證明了

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sup_t |Z_{2^n,2^{n+1}}(t,\omega)|\right) < \infty$$

從而對於殆遍的 ω，級數（2.47）對 t 均勻收斂。 #

級數（2.42）之第三項可以類似地處理，然後將（2.42）改成下面部分和的級數［且以 $(2\pi)^{-1/2}$ 爲尺度］來證明其殆遍收斂：

$$Z(t,\omega) = (2\pi)^{-1/2} t Z_0(\omega) + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\left\{\frac{Z_k(\omega)(e^{ikt}-1)}{ik(2\pi)^{1/2}} + \frac{Z_{-k}(\omega)(e^{-ikt}-1)}{-ik(2\pi)^{1/2}}\right\}\right]. \tag{2.50}$$

事實上，如果證明了 $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} Z_k(\omega)/k$ 之殆遍收斂，則我們的斷言可由命題2.5立即推得。

上述的收斂（事實上對 t 是均勻的）是級數

$$\sum_k \frac{Z_k(\omega)}{k}$$

在 $L^2_c(\Omega, \mathrm{B}, P)$ 中收斂的結論。又因爲每一項都具有Gauss分佈，從而

得到殆遍收斂。我們在定理 1.9 討論過這個推論的實值情形，此地只是把這個結果分別應用到實部與虛部而已。

下面的結果是命題 2.5 的推論：

【推論】 對於殆遍的 ω，由（2.50），$t\in[0,2\pi]$，所定義的級數為 t 的連續函數。

現在我們已經建構了複值 Wiener 過程 $\{Z(t,\omega): t\in[0,2\pi]\}$，並且證明了其樣本路徑為可表成 Fourier 級數之和的連續函數。再回到（2.42），將它表成實部與虛部之和：

$$(2\pi)^{-1/2}Z_1(t,\omega)=Z(t,\omega)=2^{-1/2}[X(t,\omega)+iY(t,\omega)] \tag{2.51}$$

其中 $X(t)$ 與 $Y(t)$ 是實值的，並且回憶記號 $Z_k(\omega)=2^{-1/2}[X_k(\omega)+iY_k(\omega)]$。於是可以觀察得到

$$X(t,\omega)=\frac{tX_0(\omega)}{\sqrt{2\pi}}+\sum_n{}' \frac{X_n(\omega)\sin nt+Y_n(\omega)(\cos nt-1)}{\sqrt{2\pi}\,n}, \tag{2.52}$$

$$Y(t,\omega)=\frac{tY_0(\omega)}{\sqrt{2\pi}}+\sum_n{}' \frac{-X_n(\omega)(\cos nt-1)+Y_n(\omega)\sin nt}{\sqrt{2\pi}\,n}. \tag{2.53}$$

【命題 2.6】

由（2.52）與（2.53）所定義的兩個隨機過程 $\{X(t): t\in[0,2\pi]\}$ 與 $\{Y(t): t\in[0,2\pi]\}$ 是獨立的 Wiener 過程。

【證明】 我們知道 $\{X_n, Y_n: n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 為一族獨立隨機變數並且 X_n 與 Y_n 都具有標準 Gauss 分佈。這當然是 Gauss 型系統，故

$$\{X_0, Y_0, X_n\sin nt+Y_n(\cos nt-1), \\ -X_n(\cos nt-1)+Y_n\sin nt: n=\pm1,\pm2\cdots\} \tag{2.54}$$

亦為 Gauss 型系統。復次，此系統中的隨機變數皆互相獨立。為明乎此，只要證明（2.54）中的每一對隨機變數之協變異數等於 0。當指標相異時，這是顯然的；當指標相同時，我們有

$$
\begin{aligned}
&E\{[X_n \sin nt + Y_n(\cos nt - 1)][-X_n(\cos nt - 1) + Y_n \sin nt]\} \\
&\quad = -\sin nt(\cos nt - 1)E(X_n^2) + \sin nt(\cos nt - 1)E(Y_n^2) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}
$$

由這個結果與公式（2.52），（2.53）得知，兩過程 $\{X(t): t \in [0, 2\pi]\}$ 與 $\{Y(t): t \in [0, 2\pi]\}$ 是獨立的，並且它們是平均值爲 0 的Gauss 過程。今計算協變異函數，首先求得此系統中的隨機變數之變異數：

$$
\begin{aligned}
&E(X_0^2) = E(Y_0^2) = 1, \\
&E\{[X_n \sin nt + Y_n(\cos nt - 1)]^2\} \\
&\quad = E\{[-X_n(\cos nt - 1) + Y_n \sin nt]^2\} \\
&\quad = \sin^2 nt + (\cos nt - 1)^2 \\
&\quad = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} nt, \qquad n \neq 0.
\end{aligned}
$$

利用這些公式可以證明 $\{X(t): t \in [0, 2\pi]\}$ 與 $\{Y(t): t \in [0, 2\pi]\}$ 具有相同的（Gauss）分佈。特別地

$$E(X(t)X(s)) = E(Y(t)Y(s)).$$

另一方面，利用 $\{X(t)\}$ 與 $\{Y(t)\}$ 之獨立性及期望值爲 0 的事實，可以將公式（2.46）

$$E(Z(t)\overline{Z(s)}) = t \wedge s$$

改寫成

$$\tfrac{1}{2}E\{[X(t) + iY(t)][X(s) - iY(s)]\} = \tfrac{1}{2}\{E(X(t)X(s)) + E(Y(t)Y(s))\} = t \wedge s.$$

於是我們已證明了 $\{X(t): t \in [0, 2\pi]\}$ 與 $\{Y(t): t \in [0, 2\pi]\}$ 均爲Wiener 過程。 #

【註 1】 在命題 2.6的光照下，我們可以由獨立的標準化（實的）Gauss 隨機變數

$$X_n' = \frac{X_n \sin nt + Y_n(\cos nt - 1)}{2\sin \frac{1}{2}nt} \qquad n \neq 0$$

出發，直接得到（2.52）式，而表成下形：

$$X(t,\omega) = \frac{tX_0(\omega)}{\sqrt{2\pi}} + \sum_n{}' \frac{\sqrt{2}X_n'(\omega)\sin(\frac{1}{2}nt)}{\sqrt{\pi}\,n}, \qquad t \in [0, 2\pi]. \tag{2.55}$$

因此我們由獨立的標準Gauss隨機變數 $\{X_n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 出發，有辦法來建構（實的）Wiener 過［參見K. Itô（1953第 39節］。

【註2】 爲了證明：殆遍地，級數（2.52），（2.53）與（2.55）對 t 均勻收斂，必須將級數改成部分和的級數，如我們所做的（2.50）之級數。我們省略掉詳情，以避免複雜的演算。

【定義 2.4】

設 T 爲 $[0, \infty)$ 的有限或無限子區間一個複值隨機過程 $\{Z(t) : t \in T\}$ 若滿足下列條件：存在兩個獨立的實值Wiener 過程 $\{X(t) : t \in T\}$ 與 $\{Y(t) : t \in T\}$ 使得

$$Z(t,\omega) = 2^{-1/2}(X(t,\omega) + iY(t,\omega)) \tag{2.56}$$

則稱 $\{Z(t) : t \in T\}$ 爲一個複值Wiener 過程。

到目前爲止我們可以綜合上述的討論如下：我們已建構了一個複值 Wiener 過程，並且得到其實部與虛部爲兩個獨立的實值Wiener過程。讀者可參閱N. Wiener 與 E. J. Akutowicz（1957）的論文，其中含有有關複值Wiener 過程的有趣結果。

複值 Wiener 過程的許多性質，諸如加性（參見第 2.1 節），樣本路徑的行爲等等，可以透過（2.56）式化約成相應的實值 Wiener 過程之性質。我們不預備敍述這種顯然的推廣，而有興趣於複值 Wiener 過程的非線性泛函，這將於第六章詳論。

在結束本節之前，我們解釋一下爲何要由形式級數（2.41）或級數（2.42）出發來建構我們的複值 Wiener 過程。當然這個選擇並不是偶然

的，而是考慮 Wiener過程的樣本路徑之Fourier 展開性質而來的。我們說明於下。

假設一個複值Wiener 過程 $\{Z(t): t\in[0,2\pi]\}$ 已給定，並且其所有樣本路徑皆連續。對 $Z(t)$ 作如下的修飾：將 Z 在 $t=0$ 與 $t=2\pi$ 兩點的取值等同起來，再令

$$Z_0(t,\omega)=Z(t,\omega)-(2\pi)^{-1}tZ(2\pi,\omega). \tag{2.57}$$

得到單位圓上的一個函數 $Z_0(t)$。顯然 $E(Z_0(t))\equiv 0$，且

$$E(Z_0(t)\overline{Z_0(s)})=t\wedge s-(2\pi)^{-1}st, \tag{2.58}$$

這又等於 $(2\pi)^{-1}G(s,t)$、其中 G 爲 (2.43) 所定義者。相應於 G 的展示 (2.43)，我們也希望對 $Z_0(t)$ 本身作展開。

對於固定的 ω，我們視 $Z(\cdot,\omega)$ 爲 $L^2([0,2\pi])$ 的元素，並且將它對完備么正系統 $\{(2\pi)^{-1/2}\exp(int): n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 作 Fourier 級數展開。Fourier 係數爲

$$A_n(\omega)=(2\pi)^{-1/2}\int_0^{2\pi}e^{-int}Z_0(t,\omega)\,dt,$$

並且形式上的Fourier 級數展式爲

$$Z_0(t,\omega)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(\omega)e^{int}. \tag{2.59}$$

今證明上式事實上是等式。對於 $m\neq 0$，$n\neq 0$，利用初等的結果

$$\int_0^{2\pi}e^{ins}G(t,s)\,ds=\frac{2\pi(e^{int}-1)}{n^2},$$

得到

$$\begin{aligned}E(A_m\bar{A}_n)&=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-imt+ins}G(t,s)\,dt\,ds}{2\pi}\\&=(2\pi n^2)^{-1}\int_0^{2\pi}[e^{i(n-m)t}-e^{-imt}]\,dt\\&=\delta_{m,n}n^{-2}.\end{aligned} \tag{2.60}$$

由A_n的定義立即得到分解式$A_n = X_n + iY_n$，其中X_n與Y_n爲實值獨立隨機變數，具有相同的Gauss分佈。由（2.60）的結果可知，$\{A_n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$爲一獨立的系統；這種複值隨機變數的一般理論，我們將在第6.1節討論。

至於剩下的係數$A_0(\omega)$，我們要證明它具有下式的關係：

$$-A_0(\omega) = \sum_n{}' A_n(\omega). \tag{2.61}$$

首先我們觀察到，因爲A_n互相獨立且由（2.60）知它們的變異數的和爲有限，故（2.61）之右項殆遍收斂。其次證明（2.61）之等號成立。因爲$G(t, s)$在正方形領域$[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$上可積分，故$Z_0(t, \omega)$平方可積，亦即

$$Z_0(t, \omega) \in L^2([0, 2\pi] \times \Omega, m \times P),$$ 其中m爲Lebesgue測度。

由補題2.5之公式（2.43）與等式$\Sigma_{n>0} n^{-2} = \pi^2/6$得知，當$N \to \infty$時

$$E\left\{\int_0^{2\pi} \left| Z_0(\omega, t) - (2\pi)^{-1/2} \sum_{1 \le |n| \le N} A_n(\omega)(e^{int} - 1)\right|^2 dt\right\} \to 0$$

故由Fubini定理得到

$$(2\pi)^{-1/2} \sum_n{}' A_n(\omega)(e^{int} - 1) = Z_0(t, \omega) \qquad \text{a.s. } (P).$$

將左項的Σ_n'表成如（2.50）之部分和級數，而得到$t \in [0, 2\pi]$的一個連續（樣本）函數。因此對t逐項積分，所得的結果必等於$Z_0(t, \omega)$的積分，從而很容易地證明了（2.61）。

如果我們從$Z_n = inA_n$以便么正化A_n，則當我們作Fourier級數展開時，級數（2.42）便很自然地出現了。

2·4 Wiener 過程的 Markov 性

這一節我們要來探討Wiener過程更基本而重要的演化性質，亦即Markov性、強Markov性與有關的論題。

對於時軸T，令$\{X(t): t\in T\}$爲一可測隨機過程，亦即$X(t,\omega)$爲(t,ω)可測。再令$\mathbf{B}_t(X)=\mathbf{B}(X(s): s\leq t)$。

【定義 2.5】

我們稱隨機過程$\{X(t)\}$爲一個Markov過程，如果下面條件成立的話：對於任意s與$t>s$，以及Borel子集$A\subset\mathbf{R}$，我們有

$$P(X(t)\in A\,|\,\mathbf{B}_s(X))=P(X(t)\in A\,|\,X(s))\qquad \text{a.e.}\tag{2.62}$$

【註】 有關條件機率的定義與記號，請參閱第1.4節。

對應於一個Markov過程$\{X(t): t\in T\}$有一族遷移機率函數$\{P(s,x,t,A): s,t\in T,\ t>s,\ x\in\mathbf{R},\ A\in\mathfrak{B}(\mathbf{R})\}$滿足：

1. 對於固定的s，t與A，$P(s,x,t,A)$爲x的Borel可測函數；對固定的s，t與x，$P(s,x,t,\cdot)$爲一機率測度。
2. $P(s,x,s,A)=\chi_A(x)$。
3. 在集合$\{\omega: X(s,\omega)=x\}$上，我們有

$$P(X(t)\in A\,|\,X(s))=P(s,x,t,A)\qquad \text{a.e.}$$

4. 下面的Chapman-Kolmogorov方程對殆遍的x成立：

$$P(s,x,u,A)=\int_{-\infty}^{\infty}P(s,x,t,dy)P(t,y,u,A)\qquad s<t<u.\tag{2.63}$$

此地殆遍是相對於$X(s)$的分佈而言的。

任何這種函數$P(s,x,t,A)$，稱爲Markov過程$\{X(t)\}$的遷移機率。

如果遷移機率之爲s，t的函數只跟$t-s$有關，亦即對任意固定的x與A，$P(s,x,t,A)=P(t-s,x,A)$，則稱$\{X(t)\}$爲對時間是齊性的Markov過程。在這種情形，我們可令

$$P_x(X(t)\in A)=P(t,x,A),\qquad A\in\mathfrak{B},\tag{2.64}$$

而得到 $(\Omega, \mathbf{B})$ 上的一族機率測度 $\{P_x : x \in \mathbf{R}\}$。

爲了明確起見，以下我們取 $T = [0, \infty]$。我們宣稱：Markov過程 $\{X(t): t \in T\}$ 的分佈由 $X(0)$ 的分佈與遷移機率 $\{P(s, t, x, A)\}$ 所唯一決定。事實上，任何岸界分佈，例如 $(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$，$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，的分佈可以反覆利用Markov性 (2.62) 而得到：

$$P((X(t_1), \ldots, X(t_n)) \in A_n)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(dx_0) \int_{A_n} \cdots \int P(0, x_0, t_1, dx_1) P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \cdots P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n)$$

其中 A_n 爲 n 維 Borel 集。

今我們改變一下觀點，由滿足上述(1)，(2)及 (2.63) 之 $\{P(s, x, t, A)\}$ 出發，來建構一個Markov過程使其遷移機率爲給定的 $P(s, x, t, A)$ 且滿足上述的(3)。有關 $\{X(t)\}$ 的建構是取 $\Omega = \mathbf{R}^T$ 然後跟第 1.3 節 [2] 所述者相同。而Markov性可由Chapman-Kolmogorov 方程推得。在 $\Omega = \mathbf{R}^T$ 的情形，由初期分佈 Φ_0 與遷移機率唯一決定了Markov過程 $\{X(t)\}$。

如果機率測度 $P(s, x, t, \cdot)$ 相對於Lebesgue測度是絕對連續的，我們記機率密度函數爲 $p(s, x, t, y)$，於是有

$$P(s, x, t, A) = \int_A p(s, x, t, y)\, dy$$

我們稱 $p(s, x, t, y)$ 爲遷移機率密度。

Markov過程的一般理論可以在許多標準的書本裡找到〔例如K. Itô與H. P. Mckean Jr. (1965)，W. Feller (1966) 及E. B. Dynkin與A. A. Yushkevich (1969)〕，因此我們不預備談它。我們要集中於探討Wiener過程，其中最重要的一個性質是Markov性。除此之外，我們還要討論一些有關的論題。

【定理 2.7】

任何Wiener過程 $\{W(t): t \geq 0\}$ 皆爲對時間是齊性的Markov 過

程，並且其遷移機率具有Gauss核密度：$p(s,x,t,y)=g(t-s,x,y)$。

【證明】 欲證Markov性，只要證：對任意 $t>s$ 與柱集 $C\in\mathbf{B}_s=\mathbf{B}_s(W)$，我們有

$$\int_C P(W(t)\in A\,|W_s)\,dP(\omega)=\int_C P(W(t)\in A\,|W(s))\,dP(\omega). \tag{2.65}$$

今假設 C 給如下：

$$C=\{W(s_n)\in A_n,\ldots,W(s_1)\in A_1,W(s)\in A_0\}$$

其中 $0\le s_n<s_{n-1}<\cdots<s_1<s$ 且 $A_n,\cdots,A_1,A_0$ 皆為 $\mathbf{R}$ 中之Borel集。（因為 A_0 恒取為 $\mathbf{R}$，故 s 恒可看作是諸 s_i 之一，這有助於決定出 C）。對於這樣的 C，（2.65）的左項為

$$\begin{aligned}
\int_C \chi_{\{B(t)\in A\}}(\omega)\,dP(\omega) &= P(C\cap\{W(t)\in A\})\\
&=\int_{A_n}\cdots\int_{A_1}\int_{A_0}\int_A g(s_n,s_{n-1}-s_n,\ldots,s-s_1,t-s;\\
&\qquad x_n,x_{n-1}-x_n,\ldots,x-x_1,y-x)\,dx_n\cdots dx_1\,dx\,dy\\
&=\int_{A_n}\cdots\int_{A_1}\int_{A_0} g(s_n,s_{n-1}-s_n,\ldots,s-s_1;\\
&\qquad x_n,x_{n-1}-x_n,\ldots,x-x_1)\\
&\qquad\times\left\{\int_A g(t-s;y-x)\,dy\right\}dx_n\cdots dx_1\,dx.
\end{aligned}$$

今已知 $(W(s),W(t))$ 具有兩維的Gauss分佈，其密度為 $g(s,t-s;x,y-x)$。因此上式的大括號 $\{\ \}$ 項為在條件 $W(s)=x$ 之下的條件機率 $P(W(t)\in A\,|\,W(s))$。有了這個觀測，我們看出上式最末一行可以寫成

$$\int_C P(W(t)\in A\,|W(s))\,dP(\omega).$$

進一步，我們看出遷移機率 $P(s,x,t,A)$ 可以表成 $\int_A g(t-s;y-x)dy$，特別地，它之為 t 與 s 的函數只跟 $t-s$ 有關。因此 $\{W(t)\}$ 為一個

時間齊性之Markov過程，並且它的遷移機率密度爲$g(t-s;y-x)$，其中g爲Gauss核。 #

今假設$W(s)=a$，$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，且B_n爲一個n維Borel集，由Wiener過程的Markov性，聯合分佈與條件機率之間的一般關係，立即得到下式：

$$
\begin{aligned}
&P((W(s+t_1), W(s+t_2), \ldots, W(s+t_n)) \in B_n | W(s)) \\
&= \int_{B_n} g(t_1; y_1-a) g(t_2-t_1; y_2-y_1) \cdots g(t_n-t_{n-1}; y_n-y_{n-1})\, dy_1 \cdots dy_n \quad (2.66) \\
&= \int_{B_n} g(t_1, t_2-t_1, \ldots, t_n-t_{n-1}; y_1-a, y_2-y_1, \ldots, y_n-y_{n-1})\, dy_1 \cdots dy_n .
\end{aligned}
$$

令$W_a(t,\omega)=W(t,\omega)+a$，$t\geq 0$，我們看出(2.66)之機率就是$(W_a(t_1),\cdots,W_a(t_n))$的分佈。在第2.1節我們引入了Wiener測度$\mu^W$，利用同樣的辦法，我們在連續函數空間$\mathscr{C}([0,\infty))$上得到一個機率測度$\mu_a^W$，它是$\{W_a(t):t\geq 0\}$的分佈。這個測度也可以看作是過程$\{W(t):t\geq 0\}$的分佈，但是此過程以(2.64)所定義的$P_a$爲機率法則。由於有這兩種等價的看法，$\mu_a^W$，$a\in\mathbf{R}$，也稱爲條件Wiener測度。另外，這個觀察也導致我們將Markov性說成：當我們一經知道過程在某一時刻到達a點，往後的行爲就如同它由a點重新開始運動。

設$\{X(t):t\geq 0\}$爲一個可測的Markov過程。一個定義在$(\Omega,\mathbf{B})$上的可測函數σ若滿足下列兩條件：

1. $0\leq\sigma(\omega)\leq\infty$；
2. 對任意t，

$$\{\omega: \sigma(\omega) < t\} \in \mathbf{B}_t(X), \tag{2.67}$$

則稱σ爲一個Markov時刻(Markov time)[相對於$\{W(t)\}$]。

【註】 有時需要Markov時刻作更一般的定義。例如，通常我們把$\{\mathbf{B}_t(X):t\geq 0\}$換成一族子$\sigma$環$\{\mathbf{A}_t:t\geq 0\}$，滿足：(1) $\mathbf{A}_t\supseteq\mathbf{B}_t$，(2) $\mathbf{A}_t\supseteq\mathbf{A}_s$，當$t>s$，(3) $\mathbf{A}_t$獨立於$\{X(t+s)-X(s):s\geq 0\}$。在

這種情形下，若對所有 t，

$$\{\omega: \sigma(\omega) < t\} \in \mathbf{A}_t,$$

則稱 σ 爲一個相對於 $\{\mathbf{A}_t\}$ 之Markov 時刻。以下，我們不需要這麼廣泛的定義，因此我們仍然採用（2.67）之較狹義的定義。

【例1】

令 $G = [-1, 1]^c$，我們定義 σ 爲

$$\sigma(\omega) = \sigma_G(\omega) = \inf\{t: W(t, \omega) \in G\} \tag{2.68}$$

其中 $\{W(t)\}$ 爲一個Wiener 過程。因爲我們有

$$\begin{aligned}\{\omega: \sigma_G(\omega) < t\} &= \{\omega: W(r, \omega) \in G \text{ 對某有理數 } r < t\} \\ &= \bigcup_{r<t} \{\omega: W(r, \omega) \in G\} \in \mathbf{B}_t,\end{aligned}$$

這就證明了 σ 爲一個Markov時刻。

利用Markov時刻的概念，我們就可以來介紹強 Markov性。因爲我們一直都假設 $X(t, \omega)$ 爲一可測過程，故對任意 $t > 0$，$X(t \wedge \sigma)$爲 $\mathbf{B}$ 可測。從而得到一個新的隨機過程 $\{X(t \wedge \sigma): t \geq 0\}$。令 $\mathbf{B}_\sigma$ 爲最小的 σ 體使得所有的隨機變數 $X(t \wedge \sigma)$，$t \geq 0$，皆可測。再令 $\mathbf{B}_{\sigma+} = \cap_{\varepsilon>0} \mathbf{B}_{\sigma+\varepsilon}$。

【定義 2.6】

設 $\{X(t)\}$ 爲時間齊性的一個Markov 過程。如果對任意Markov 時刻 σ，$A \in \mathbf{B}_{\sigma+}$，時刻 $t_1, \cdots, t_n \geq 0$，及 $\mathbf{R}$ 的 Borel 子集 $B_1, \cdots, B_n$，我們有

$$\begin{aligned}&P_a\{A \cap \{X(\sigma + t_j) \in B_j: 1 \leq j \leq n\} \cap \{\sigma < \infty\}\} \\ &= E_a\{\chi_A \cdot P_{X(\sigma)}\{X(t_j) \in B_j: 1 \leq j \leq n\}; \sigma > \infty\}.\end{aligned} \tag{2.69}$$

其 E_a 表示對測度 P_a 來取期望值，並且 $E(\cdot\,; \sigma < \infty)$ 表示在集合 $\{\omega: \sigma(\omega) < \infty\}$ 上作積分。

Wiener 過程爲一個強Markov過程，現在我們來證明這個斷言，分成

下面步驟：首先注意到，我們可以假設 $\{W(t)\}$ 的樣本路徑爲連續函數，必要的話去掉 P 的一個零測集就好了。當然，$\mathbf{B}$ 與 $\mathbf{B}_t$ 也要相應地作修飾，不過我們仍用同樣的記號。令 σ 爲一個Markov 時刻，再令

$$W_\sigma(t,\omega)=W(t\wedge\sigma(\omega),\omega),\qquad t\geq 0. \tag{2.70}$$

這樣得到的隨機過程 $\{W_\sigma(t): t\geq 0\}$，其樣本路徑皆爲連續函數。例如，讓我們考慮例 1 中所引入的Markov 時刻 σ_G，我們看出 $W(t)$ 逗留在區間 $[-1,1]$ 內時，$W_\sigma(t)$ 的行爲完全跟 $W(t)$ 相同，直到時刻 $\sigma(\omega)$ 來臨，$W(t,\omega)$ 碰到 1 或 -1，$W_\sigma(t,\omega)$ 就永遠停息不動。

【命題 2.7】

Markov 時刻 σ 爲 $\mathbf{B}_\sigma$ 可測。

【證明】 首先我們注意到，由樣本路徑的連續性，及 Wiener 過程的加性（由此可得 0－1 律，見 K. Itô 與 H. P. Mckean Jr.(1965)，第一章）得知

$$\mathbf{B}_t=\mathbf{B}_{t+}\left(=\bigcap_{\varepsilon>0}\mathbf{B}_{t+\varepsilon}\right)$$

爲了證明本命題，只需證明 $\sigma(\omega)$ 爲 $W(t\wedge\sigma)$，$t\geq 0$，的可測函數。當 $\sigma(\omega)=\infty$ 時，這是顯然的。今設 $\sigma(\omega)<\infty$，則得

$$(\sigma\leq t)=\bigcap_n(\sigma<t+n^{-1})\in\mathbf{B}_{t+}=\mathbf{B}_t$$

因此，$\sigma(\omega)\leq t$ 等價於將連續函數 $W(\cdot,\omega)$ 局限到 $[0,t]$ 上時屬於某 Borel 子集 $\subset\mathscr{C}([0,t])$。因爲在 $[0,t]$ 上，當 $\omega\in(\sigma>t)$ 時，有 $W(t,\omega)=W_\sigma(s,\omega)$，這就證明了我們的命題。 #

【註】 對於一般的Markov過程 $\{X(t)\}$ 而言，σ 不恒爲 $\mathbf{B}_\sigma(X)$ 可測。

【推論】 對於任意Markov時刻 $\sigma(\omega)$，$W(\sigma(\omega),\omega)$ 爲 $\mathbf{B}_\sigma$ 可測。

【定理 2.8】

設 σ 爲一Markov時刻，滿足 $P(\sigma<\infty)=1$，則 $\{W(\sigma+t)-W(\sigma): t\geq 0\}$ 爲一個Wiener過程，且獨立於 $\mathbf{B}_\sigma$。

【證明】 令 $A\in\mathbf{B}_\sigma$ 並且取非負時刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$。將 $\mathbf{R}^n$ 上的有界連續函數 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 記爲 $f(x_j: 1\leq j\leq n)$，我們可以證明，對任意Markov時刻 σ

$$\int_A f(W(\sigma+t_j)-W(\sigma): 1\leq j\leq n)\,dP$$
$$=P(A)\int_\Omega f(W(t_j): 1\leq j\leq n)\,dP. \tag{2.71}$$

定義序列 $\{\sigma_m\}$ 爲 $\sigma_m=\min_j\{j2^{-m}: j2^{-m}>\sigma\}$，則 σ 可用 $\{\sigma_m\}$ 來逼近。令 $A_k=A\cap(\sigma_m=k2^{-m})$，則我們有 $A=\cup_1^\infty A_k$（互斥併聯）並且

$$\int_A f(W(\sigma_m+t_j)-W(\sigma_m): 1\leq j\leq n)\,dP$$
$$=\sum_k\int_{A_k} f(W(k2^{-m}+t_j)-W(k2^{-m}): 1\leq j\leq n)\,dP.$$

我們注意到 $A_k\in\mathbf{B}_{k2^{-m}}$，由此看出上述最後表式之每一項變成

$$\int_{A_k} E\{f(W(k2^{-m}+t_j)-W(k2^{-m}): 1\leq j\leq n)\,|\,\mathbf{B}_{k2^{-m}}\}\,dP$$
$$=\int_{A_k} E\{f(W(k2^{-m}+t_j)-W(k2^{-m}): 1\leq j\leq n)\}\,dP$$

（由Wiener過程的加性）

$$=P(A_k)\cdot E\{f(W(t_j): 1\leq j\leq n)\}.$$

今令 $m\to\infty$ 則得 $\sigma_m\to\sigma$ 與（2.71）之等式。

對於有很多個有限區間 I_j，$1\leq j\leq n$，形如 $\Pi_1^n\chi_{I_j}(x_j)$ 的簡單函數可以用一列有界連續函數來逼近，故（2.71）對這種簡單函數仍然成立。這意味着 $(W(\sigma+t_1)-W(\sigma), \cdots, W(\sigma+t_n)-W(\sigma))$ 獨立於 $\mathbf{B}_\sigma$，從而 $\{W(\sigma+t)-W(\sigma): t\geq 0\}$ 亦獨立於 $\mathbf{B}_\sigma$。

最後我們注意到，由上述的計算，我們已經證明了：對任意 Markov時刻，$\{W(\sigma+t)-W(\sigma)\}$ 爲一個Wiener 過程。 #

【定理 2.9】

Wiener 過程爲一個強Markov 過程。

下面我們探討另一個論題，這是P. Lévy（1948，第VI章）首先討論的。利用Wiener 過程的強Markov 性，可以對 Wiener 過程的樣本路徑之複雜行爲得到深刻的洞察，並且也可以對一些重要結果〔見K. Itô與H. P. Mckean Jr.（1965），D. Freedman（1971）等。〕得到直觀而滿意的證明。首先我們解釋Wiener 過程的反射原理（reflection principle）。給一個Wiener 過程 $\{W(t)\}$ 與Markov 時刻 σ，我們可以造一個隨機過程 $\{X(t): t\geq 0\}$ 如下：對於 $\omega\in\Omega$

$$\text{如果 } \sigma(\omega)=\infty, \text{ 則令 } X(t,\omega)=W(t,\omega) \qquad t\geq 0;$$

$$\text{如果 } \sigma(\omega)<\infty, \text{ 則令 } X(t,\omega)=\begin{cases} W(t,\omega) & 0\leq t\leq \sigma(\omega); \\ 2W(\sigma(\omega),\omega)-W(t,\omega) & t\geq \sigma(\omega). \end{cases} \tag{2.72}$$

顯然 $\{X(t): t\geq 0\}$ 爲一個具有連續樣本路徑之隨機過程。有關 $X(t)$ 的定義，其想法是這樣的：在時刻 σ 之前，$X(t)$ 是道地的 Wiener 過程$W(t)$。但是當 t 取到 σ 的值時，$X(t)$ 就變成$W(t)$ 對直線 $y=W(\sigma)$ 之反射，見圖5。

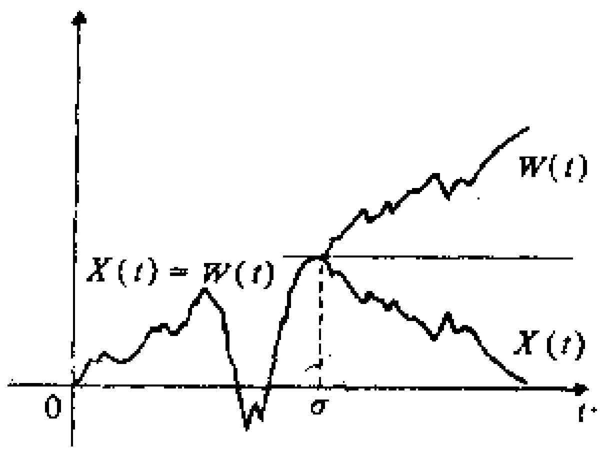


圖 5

【定理 2.10】

$\{X(t): t \geq 0\}$ 爲一個Wiener 過程。

【證明】 在集合 $(\sigma = \infty)$ 上，我們有 $X(t, \omega) = W(t, \omega)$，$\forall\, t \geq 0$，故沒有什麼好證的。因此我們可設 $P(\sigma < \infty) = 1$。令 $\mathbf{B}_\sigma(t)$ 爲 (2.70) 所定義者，考慮

$$(\sigma(\omega), \{W_\sigma(t, \omega): t \geq 0\}, \{W(\sigma(\omega) + t, \omega) - W(\sigma(\omega), \omega): t \geq 0\}) \tag{2.73}$$

$$(\sigma(\omega), \{W_\sigma(t, \omega): t \geq 0\}, \{-[W(\sigma(\omega) + t, \omega) - W(\sigma(\omega), \omega)]: t \geq 0\}). \tag{2.74}$$

由定義及命題 2.7 可證得 $\{W_\sigma(t)\}$ 與 σ 兩者皆爲 $\mathbf{B}_\sigma$ 可測因此由定理 2.8 可知，$\{W_\sigma(t)\}$ 與 σ 兩者皆獨立於Wiener 過程 $\{W(\sigma + t) - W(\sigma): t \geq 0\}$，從而亦獨立於 $\{-[W(\sigma + t) - W(\sigma)]: t \geq 0\}$。復次，我們很容易就可以證得 (2.73) 與 (2.74) 具有相同的分佈。今我們注意到，Wiener過程 $\{W(t): t \geq 0\}$ 可經由連結 (2.73) 中的兩個過程而得到，亦即存在一個可測函數 Φ 使得

$$\{W(t)\} = \Phi(\sigma, \{W_\sigma(t)\}, \{W(\sigma + t) - W(\sigma)\}).$$

同樣地，將此 Φ 應用到 (2.74)，得到過程 $\{X(t)\}$，亦即由 (2.72) 我們得到

$$\{X(t)\} = \Phi(\sigma, \{W_\sigma(t)\}, \{-[W(\sigma + t) - W(\sigma)]\}).$$

因此 $\{W(t)\}$ 與 $\{X(t)\}$ 具有相同的分佈，這表示 $\{X(t)\}$ 也是一個Wiener 過程。 #

這個結果只不過表示 Wiener 過程具有對稱原理，通常稱爲反射原理。

再追隨 P. Lévy 的腳步，我們引入新的隨機過程 $\{M(t): t \geq 0\}$，這是利用Wiener 過程定出來的：

$$M(t, \omega) = \max_{0 \leq s \leq t} W(s, \omega), \qquad t \geq 0. \tag{2.75}$$

因爲 $M(t, \omega) = \sup\{W(r, \omega): r$ 爲有理數，$0 \leq r \leq t\}$，故我們看出 $M(t)$ 爲 $\mathbf{B}_t$ 可測。

【命題 2.8】

對於 $y \geq 0$ 與 $z \geq 0$，我們有下面的等式：

$$P(W(t) < z - y, M(t) \geq z) = P(W(t) > y + z). \tag{2.76}$$

【證明】 令 $\sigma_z = \min\{s : W(s) = z\}$，因爲 $\{\sigma_z \leq t\} = \{M(t) \geq z\}$，故

$$(\sigma_z < t) = \bigcup_n (\sigma_z \leq t - n^{-1}) \in \mathbf{B}_t(M) \subseteq \mathbf{B}_t.$$

從而知道 σ_z 爲一個Markov時刻。

在（2.72）中取 $\sigma = \sigma_z$，作出 $\{X(t)\}$。今令 $\tau_z = \min\{s : X(s) = z\}$。於是（$\tau_z$，$\{X(t)\}$）與（$\sigma_z$，$\{W(t)\}$）具有相同的分佈，故

$$P(\tau_z \leq t, X(t) < z - y) = P(\sigma_z \leq t, W(t) < z - y). \tag{2.77}$$

由 $\{X(t)\}$ 的定義立得 $\sigma_z(\omega) = \tau_z(\omega)$，故必有

$$(\tau_z \leq t, X(t) < z - y) = (\sigma_z \leq t, W(t) > z + y)$$

這個結果再加上（2.77），得到

$$P(\sigma_z \leq t, W(t) > z + y) = P(\sigma_z \leq t, W(t) < z - y).$$

左項又等於 $P\{M(t) \geq z, W(t) > z + y\} = P\{W(t) > z + y\}$，這是因爲在 $W(t) > z + y$ 的條件下，$M(t) \geq z$ 是多餘的。將條件 $\sigma_z \leq t$ 重述就看出，上式之右項可以寫成 $P\{M(t) \geq z, W(t) < z - y\}$。這就證明了（2.76）式。 #

【推論】 $(W(t), M(t))$，$t > 0$，的聯合分佈相對於二維的Lebesgue 測度是絕對連續的，並且其密度函數 $f(x, z)$ 爲

$$f(x, z) = \begin{cases} 0, & x > z \text{ 或 } z < 0 \\ (2/\pi)^{1/2}(2z - x)t^{-3/2} \exp\left[\dfrac{-(2z - x)^2}{2t}\right], & z \geq 0, z \geq x. \end{cases} \tag{2.78}$$

【證明】 在上述（2.76）中令 $z - y = x$，然後對 x 與 z 作二階偏導微

，（2.78）就立即得到了。 #

【命題 2.9】

下面等式對 $z \geq 0$ 與 $t > 0$ 皆成立：

$$P(M(t) \geq z) = 2P(W(t) \geq z) = P(|W(t)| \geq z). \tag{2.79}$$

【證明】 在（2.76）式中置 $y = 0$，於是得到

$$P(W(t) < z, M(t) \geq z) = P(W(t) > z).$$

從而

$$\begin{aligned} P(M(t) \geq z) &= P(W(t) < z, M(t) \geq z) + P(W(t) \geq z, M(t) \geq z) \\ &= P(W(t) > z) + P(W(t) \geq z). \end{aligned}$$

今因 $P\{W(t) = z\} = 0$，故（2.79）的第一個等式成立；而第二個等式不過是具有零平均的對稱Gauss分佈之結論。 #

今轉而考慮另一個隨機過程 $\{m(t): t \geq 0\}$，定義如下：

$$m(t, \omega) = \min_{0 \leq s \leq t} W(s, \omega), \qquad t \geq 0. \tag{2.80}$$

顯然 $m(t)$ 爲 $\mathcal{B}_t$ 可測。因爲Wiener 過程具有對稱的分佈且 $m(t, \omega) = -\max_{0 \leq s \leq t}\{-W(t, \omega)\}$，故我們看出

$$\{-m(t): t \geq 0\} \sim \{M(t): t \geq 0\}, \tag{2.81}$$

其中～表示兩個過程具有相同的分佈。

利用Markov時刻的技巧，我們要來證明Lévy的一個有關於（$m(t)$，$M(t)$，$W(t)$）的聯合分佈之結果［參見P. Lévy（1948），第VI章，第42；也請參見L. Bachelier（1941）］。

令 σ_x 爲一個Markov時刻，定義爲 $\sigma_x(\omega) = \min\{t: W(t, \omega) = x\}$。取兩個常數 a，b 使得 $a < 0 < b$，考慮事件 $A = \{\sigma_a < \sigma_b\}$，$C = \{\sigma_b < \sigma_a\}$，$A^* = \{\sigma_a \leq t\}$ 與 $C^* = \{\sigma_b \leq t\}$。定義變換 γ_y 爲

$$\gamma_y(x) = 2y - x,$$

並且延拓成集映射：

$$\gamma_y(H) = \{\gamma_y(h) : h \in H\}, \qquad H \subseteq \mathbf{R}.$$

參見圖 6

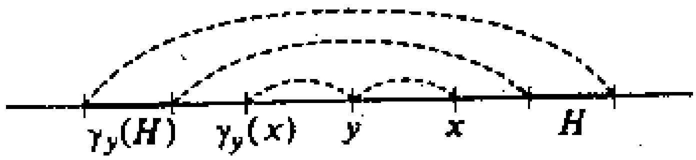


圖 6

對於一個 Borel 子集 $H \subseteq (-\infty, a]$，關係式 $\{W(t) \in H\} \subseteq A^*$ 成立，故我們也有

$$C \cap (W(t) \in H) \subseteq C^*.$$

另外，由關係式 $\gamma_b(H) \subseteq [b ; \infty)$ 得知

$$(\overline{W}(t) \in \gamma_b(H)) \subseteq C^*.$$

參見圖 7

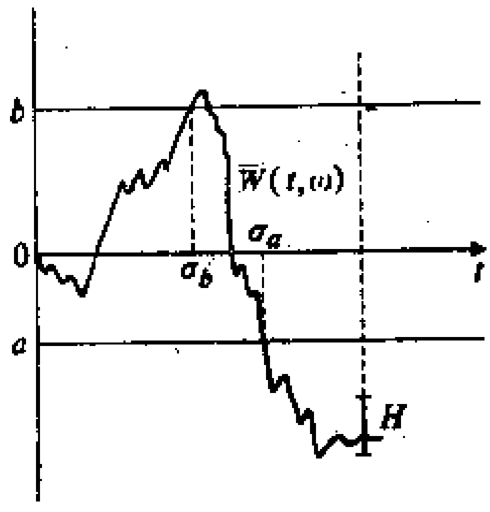


圖 7

對 σ_b 使用反射原理得到

$$P(C \cap (W(t) \in H)) = P(C \cap (\overline{W}(t) \in \gamma_b(H))).$$

因爲$C=\Omega\setminus A$，故對$H\subseteq(-\infty,a]$我們有等式：

$$P(C\cap\{W(t)\in H\})=P(W(t)\in\gamma_b(H))-P(A\cap\{W(t)\in\gamma_b(H)\}). \tag{2.82}$$

同理，當$H\subset[b,\infty)$時，我們可以證明

$$P(A\cap\{W(t)\in H\})=P(W(t)\in\gamma_a(H))-P(C\cap\{W(t)\in\gamma_a(H)\}). \tag{2.83}$$

爲了敍述一個有趣的結果，我們引入下面的函數：對$t>0$與$a<0<b$，定義

$$\begin{aligned}k(x)&=k(a,b,t;x)\\&=(2\pi t)^{-1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[\frac{-(x-2nl)^2}{2t}\right]-\exp\left[\frac{-(x-2a+2nl)^2}{2t}\right]\right\},\end{aligned}$$

其中$l=b-a$。

【命題 2.10】

（P. Lévy）對任意Borel子集$J\subset[a,b]$，我們有

$$P(a<m(t)\le M(t)<b,W(t)\in J)=\int_J k(x)\,dx. \tag{2.84}$$

【證明】 我們所要求算的機率爲

$$P(W(t)\in J)-P(A\cap A^*\cap\{W(t)\in J\})-P(C\cap C^*\cap\{W(t)\in J\}). \tag{2.85}$$

先由第二項開始計算，記爲p。由反射原理，我們可以寫成$p=P(A\cap A^*\cap\{W(t)\in\gamma_a(J)\})$。因爲$\gamma_a(J)\subset(-\infty,a]$，故有$\{W(t)\in\gamma_a(J)\}\subseteq A^*$。從而

$$p=P(A\cap\{W(t)\in\gamma_a(J)\})=P(W(t)\in\gamma_a(J))-P(C\cap\{W(t)\in\gamma_a(J)\}).$$

今利用（2.82）與（2.83）得到

$$p=P(W(t)\in\gamma_a(J))-P(W(t)\in\gamma_b(\gamma_a(J)))+P(W(t)\in\gamma_a(\gamma_b(\gamma_a(J))))-\cdots.$$

記 $\gamma_a(\gamma_b(x))=(\gamma_a\gamma_b)(x)$，則得 $(\gamma_a\gamma_b)^n(x)=x-2nl$，且 $(\gamma_b\gamma_a)^n(x)=x+2nl$，其中 $l=b-a$。因此我們有

$$P(W(t)\in(\gamma_b\gamma_a)^n(J))=P(W(t)-2nl\in J)$$
$$=\int_J(2\pi t)^{-1/2}\exp\left[\frac{-(x+2nl)^2}{2t}\right]dx,$$
$$P(W(t)\in\gamma_a(J))=\int_J(2\pi t)^{-1/2}\exp\left[\frac{-(x-2a)^2}{2t}\right]dx.$$

有了這些公式，我們就可以得到 p 的一個明白表式。同理對（2.85）式的第三項也類似地處理，最後就得到公式（2.84）。 #

Wiener 過程還有許多有趣的性質可以用強 Markov 性來證明，這些都可以在上述所引的 P. Lévy 的書，第VI章找到。無疑地，讀者將會欣賞 Lévy 的直觀洞見以及清晰簡單的描述手法。在這些結果當中，有些可以用我們剛才所述的辦法加以改述和證明。

2·5 Hille-Yosida 定理的應用

Banach 空間上的一參數算子半群論是由K. Yosida 與E. Hille 發展出的漂亮理論，今日稱爲Hille-Yosida 理論［參見，例如K. Yosida（1951）第12章，（1965）第IX章］。它提供給我們一個用算子論的方法來研究一般的Markov過程及特殊的Wiener 過程。

設 $\{X(t):t\geq 0\}$ 爲時間齊性之Markov 過程，其樣本路徑爲右連續。令 $\{P(t,x,A)\}$ 爲其遷移機率［見前節（2.64）］。再令 $\mathfrak{L}(\mathbf{R})$ 表所有有界Borel 可測函數所成的Banach空間，以 $\|f\|=\sup_x|f(x)|$ 爲範數，$f\in\mathfrak{L}(\mathbf{R})$。今定義算子 P_t 爲

$$(P_tf)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)P(t,x,dy)=E_x\{f(X(t))\},\qquad t\geq 0,f\in\mathfrak{L}(\mathbf{R}).\tag{2.86}$$

每個 P_t 爲 $\mathfrak{L}(\mathbf{R})$ 到自身的線性算子，我們記其範數爲 $\|P_t\|$。

【定理 2.11】

$\{P_t : t \geq 0\}$ 具有下列性質：

1. 每個 P_t 都是 $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ 上的連續線性算子。
2. P_t 爲正算子，即若 $f(x) \geq 0$ 則 $(P_t f)(x) \geq 0$。
3. $\{P_t : t \geq 0\}$ 爲一參數算子半群：

$$P_t P_s = P_{t+s}, \qquad t, s \geq 0;$$
$$P_0 = I \qquad (\text{單位算子}) \tag{2.87}$$

4. $\| P_t \| = 1$，$(P_t 1)(x) = 1(x)$，其中 $1(x)$ 爲取值 1 之常函數。
5. 對任意 $f \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$，函數

$$u(x, t) = (P_t f)(x) \tag{2.88}$$

爲 $t\ (>0)$ 的可測函數。

6. 如果 $f \in \mathfrak{L}(\mathbf{R})$ 在 x_0 點連續，則

$$\lim_{t \to 0+} (P_t f)(x_0) = f(x_0).$$

【證明】

1. 假設 f_n 在 $\mathfrak{L}(\mathbf{R})$ 中收斂到 f，亦即 f 爲有界且當 $n \to \infty$ 時，$\sup_x |f_n(x) - f(x)| \to 0$。然則

$$\sup_x |(P_t f_n)(x) - (P_t f)(x)| \leq \sup_x \int \sup_y |f_n(y) - f(y)| P(t, x, dy)$$
$$= \sup_y |f_n(y) - f(y)| \to 0 \quad \text{當} \quad n \to \infty$$

2. 是顯然的。
3. 因爲 $P(t, x, A)$ } 滿足 Chapman-Kolmogorov 方程［參見前節 (2.63)］，即

$$P(t + s, x, A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t, x, dy) P(s, y, A) \qquad s, t \geq 0,$$

故有

$$(P_t P_s f)(x) = \int \left[\int f(z) P(s, y, dz) \right] P(t, x, dy)$$

$$= \int f(z) \int P(s, y, dz) P(t, x, dy)$$

$$= \int f(z) P(t+s, x, dz) = (P_{t+s} f)(x).$$

4. 而$P_0 = I$ 是$P(0, x, A) = \chi_A(x)$ 的立即結論。

4. 是P_t 的定義之立即結論。

5. 可利用$u(t, x)$對t之可測性及上述(3)來證明。

6. 因爲f在x_0點連續，故對任意$\varepsilon > 0$，存在x_0的一個δ近旁$U_\delta(x_0)$使得當$y \in U_\delta(x_0)$時，我們有$|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$。利用關係式

$$(P_t f)(x_0) - f(x_0) = \int_{U_\delta(x_0)} (f(y) - f(x_0)) P(t, x_0, dy)$$
$$+ \int_{U_\delta(x_0)^c} (f(y) - f(x_0)) P(t, x_0, dy)$$

可得

$$|(P_t f)(x_0) - f(x_0)| \le \varepsilon P(t, x_0, U_\delta(x_0)) + 2|f| P(t, x_0, U_\delta(x_0)^c)$$
$$\le \varepsilon + 2|f| P(t, x_0, U_\delta(x_0)^c).$$

只需再利用下面的補題就完成全部的證明了。

【補題 2.6】

設$U(a)$爲a的一個開近旁，則我們有

$$\lim_{t \to 0+} P(t, a, U(a)) = 1. \tag{2.89}$$

【證明】 設$\{t_n\}$爲一數列，$t_n \downarrow 0$。令$B_n = \{X(t_n) \in U(a)\}$，因爲$X(t)$對$t$爲右連續，故有

$$\{X(0) \in U(a)\} \subseteq \liminf_{n \to \infty} B_n$$

於是我們有

$$\liminf_{n\to\infty} P(t_n, a, U(a)) \ge P_a\left(\liminf_{n\to\infty} B_n\right) \ge P_a(X(0)\in U(a))$$
$$\ge P_a(X(0)=a)=1.$$

［此地P_a為（2.64）所述者］。因此我們已證明了（2.89）。　#

【定義2.7】

在定理2.11中的$\{P_t : t\ge 0\}$稱為相應於Markov過程$\{X(t)\}$的算子半群。

設$\{P_t : t\ge 0\}$為$\mathfrak{L}(\mathbf{R})$上的一個算子半群，滿足定理2.11。定義$\{P(t, x, A)\}$為

$$P(t, x, A)=(P_t\chi_A)(x) \tag{2.90}$$

則$\{P(t, x, A)\}$為時間齊性的某個Markov過程之遷移率。並且滿足（2.89）。因此我們可以利用算子半群$\{P_t\}$來描述遷移機率的性質。

一個Markov過程相應的算子半群$\{P_t\}$一給定，其Laplace變換$\{G_\alpha : \alpha>0\}$構成了$\mathfrak{L}(\mathbf{R})$上的另一族算子，其中G_α定義為

$$(G_\alpha f)(x)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}(P_t f)(x)\,dt,\quad \alpha>0, f\in\mathfrak{L}(\mathbf{R}). \tag{2.91}$$

由定理2.11知，$P_t f$屬於$\mathfrak{L}(\mathbf{R})$，並且對t有界與連續，故（2.91）的積分可表成對$dP\times dt$的積分。於是可以利用Fubini定理得到

$$(G_\alpha f)(x)=E_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X(t))\,dt\right]. \tag{2.92}$$

對於任意$\alpha>0$，G_α為$\mathfrak{L}(\mathbf{R})$上的線性算子，稱為α階Green算子。進一步，若在$\mathbf{R}$上存在有一個測度$G(\alpha, x, dy)$使得對所有$f\in\mathfrak{L}(\mathbf{R})$，$G_\alpha f$可表成

$$(G_\alpha f)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)G(\alpha,x,dy), \tag{2.93}$$

則稱 $G(\alpha,x,dy)$ 爲 α 階 Green 測度。

【定理 2.12】

$\mathfrak{L}(\mathbf{R})$ 上的 Green 算子 $\{G_\alpha;\ \alpha>0\}$ 具有下列性質：

1. 每個 G_α 爲 $\mathfrak{L}(\mathbf{R})$ 上的連續線性算子。
2. G_α 爲正算子。
3. 下面的預解方程式成立：

$$G_\alpha-G_\beta+(\alpha-\beta)G_\beta G_\alpha=0,\qquad \alpha,\beta>0. \tag{2.94}$$

4. $\|G_\alpha\|=\alpha^{-1}$，$(G_\alpha 1)(x)\equiv\alpha^{-1}$。
5. G_α 可以延拓到右半複數平面，即 α，$\operatorname{Re}\alpha\geq 0$，使得 $(G\alpha f)(x)$ 爲 α 的解析函數。
6. 若 $f\in\mathfrak{L}(\mathbf{R})$ 在點 x_0 連續，則

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha(G_\alpha f)(x_0)=f(x_0).$$

【證明】 (1)到(6)的斷言，是定理 2.11 相應斷言的結論。我們只證(3)，(5) (5)與(6)。

(3) 預解方程證明如下：

$$\begin{aligned}P_s(G_\alpha f)(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}P(s,x,dy)\int_0^\infty e^{-\alpha t}(P_t f)(y)\,dt\\&=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(z)P(s,x,dy)P(t,y,dz)\\&=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dt\int_{-\infty}^{\infty}f(z)P(t+s,x,dz)\\&=e^{\alpha s}\int_s^\infty e^{-\alpha\tau}(P_\tau f)(x)\,d\tau.\end{aligned}$$

兩邊皆爲 s 的函數，它們的 Laplace 變換爲

$$(G_\beta G_\alpha f)(x) = \int_0^\infty e^{-\beta s} e^{\alpha s}\, ds \int_s^\infty e^{-\alpha\tau} (P_\tau f)(x)\, d\tau$$
$$= \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} (P_\tau f)(x)\, d\tau \int_0^\tau e^{(\alpha-\beta)s}\, ds$$
$$= (\alpha-\beta)^{-1} \{(G_\beta f)(x) - (G_\alpha f)(x)\}$$

由此就得證了（2.94）式。

(5) 由 G_α 的定義知，當 G_α 視爲 α 的函數時，它可以推廣至複數 $\alpha \in C$，$\mathrm{Re}\,\alpha > 0$，復次，由預解方程保證了下面極限存在：

$$\lim_{\beta\to\alpha} \frac{G_\alpha - G_\beta}{\beta-\alpha} f = \lim_{\beta\to\alpha} - G_\beta G_\alpha f = -G_\alpha^2 f.$$

如此這般，我們看出 G_α 爲 α 的解析函數。

(6) 可由定理 2.11 之(6)及下式證得

$$\alpha(G_\alpha f)(x) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t} (P_t f)(x)\, dt = \int_0^\infty e^{-t} (P_{t/\alpha} f)(x)\, dt.$$

#

利用 Green 算子 $\{G_\alpha : \alpha > 0\}$ 可詳細地來描述算子半群 $\{P_t ; t \geq 0\}$ 的母算子 $\mathcal{G} = (d/dt\ P_t)|_{t=0}$。這可由包含 $\mathcal{G}$ 的定義域之函數空間開始談起。

令 $\mathfrak{R}_\alpha = \{G_\alpha f : f \in \mathfrak{L}(\mathbf{R})\}$，因爲 G_α 爲從 $\mathfrak{L}(\mathbf{R})$ 到 $\mathfrak{R}_\alpha$ 的連續性算子，故 $\mathfrak{R}_\alpha$ 爲 $\mathfrak{L}(\mathbf{R})$ 的子空間。

【命題 2.11】

對不同的 α，空間 $\mathfrak{R}_\alpha$ 皆相同。

【證明】 由預解方程得 $G_\alpha G_\beta = G_\beta G_\alpha$。進一步我們有

$$G_\beta f = G_\alpha \{f + (\alpha-\beta) G_\beta f\}, \qquad f \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}).$$

今大括號 { } 中的項屬於 $\mathfrak{L}(\mathbf{R})$，故由上面的式子可知 $\mathfrak{R}_\beta \subseteq \mathfrak{R}_\alpha$，將 α

與 β 互換得 $\Re_\alpha \subseteq \Re_\beta$。因此 $\Re_\alpha = \Re_\beta$，$\forall\ \alpha$，$\beta > 0$。 #

今用 $\Re$ 表此共同的影域。令 $\mathfrak{N}_\alpha = \{ f \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}) : G_\alpha f = 0 \}$，則 $\mathfrak{n}_\alpha$ 爲 $\mathfrak{L}(\mathbf{R})$ 的子空間且 $\mathfrak{n}_\alpha = \mathfrak{N}_\beta$，$\forall\ \alpha$，$\beta > 0$，因爲若 $f \in \mathfrak{N}_\beta$，則由預解方程得到 $G_\alpha f = G_\beta f - (\alpha - \beta) G_\alpha (G_\beta f) = 0$。因此我們可用 $\mathfrak{N}$ 來表示 $\mathfrak{N}_\alpha$。

【命題 2.12】

對於 $u \in \Re$，函數 $\alpha u - G_\alpha^{-1} u$ 唯一決定至 mod $\mathfrak{N}$ 並且跟 α 無關。

【證明】 首先我們注意到，上述所定義的空間 $\mathfrak{N}$ 會使得 $G_\alpha^{-1} u$ 唯一決定至 mod $\mathfrak{N}$。取等價類 $\alpha u - G_\alpha^{-1} u$ 中的一個代表元素 f，用 G_α 去作用，得到 $G_\alpha f = \alpha G_\alpha u - u$，這是一個眞正的等式（即不 mod $\mathfrak{N}$）。因此我們有

$$G_\beta G_\alpha f = \alpha G_\beta G_\alpha u - G_\beta u,$$

利用預解方程得到

$$(\beta - \alpha)^{-1}(G_\alpha - G_\beta) f = \alpha(\beta - \alpha)^{-1}(G_\alpha - G_\beta) u - G_\beta u,$$

從而

$$\begin{aligned} G_\beta f &= G_\alpha f - \alpha G_\alpha u + \beta G_\beta u, \\ &= -u + \beta G_\beta u. \end{aligned}$$

因此我們已證明了 $f = \beta u - G_\beta^{-1} u \bmod (\Re)$，故 $\alpha u - G_\alpha^{-1} u$ 唯一決定至 mod $\mathfrak{N}$ 且與 α 無關。 #

這個命題使得我們可以定義一個算子 $\mathfrak{g}$ 於 $\Re$ mod $\mathfrak{N}$ 上：

$$\mathfrak{g} u = \alpha u - G_\alpha^{-1} u, \qquad u \in \Re. \tag{2.95}$$

如果對某 $\alpha > 0$，$u = G_\alpha f$，則 $\mathfrak{g} u = \alpha u - f \bmod \mathfrak{n}$，亦即

$$u = G_\alpha f \text{ 等價於 } (\alpha - \mathfrak{g}) u = f, \bmod \Re. \tag{2.96}$$

算子 $\mathfrak{g}$ 稱爲半群 $\{P_t\}$ 的母算子。

今我們形式地解釋一下爲什麼 $\mathfrak{g}$ 可以看作是母算子。令 $(d/dt) P_t |_{t=0}$

$= \mathcal{G}$，我們看出 $d/dt\ P_t = P_t \mathcal{G} = \mathcal{G} P_t$。利用此關係式我們可記 $P_t = \exp(t\mathcal{G})$，故 Laplace 變換為

$$G_\alpha = \int_0^\infty \exp[-(\alpha I - \mathcal{G})t]\, dt = (\alpha I - \mathcal{G})^{-1}.$$

從而 $(\alpha I - \mathcal{G})G_\alpha = I$ 或等價地 $\mathcal{G} = \alpha I - G_\alpha^{-1}$，因此我們就得到（2.95）有關 $\mathcal{G}$ 的定義式。當然此地我們只作形式上的演算，因為 $\mathcal{G}$ 是無界的，必須更小心地處理指數映射。

【命題 2.13】

母算子 $\mathcal{G}$ 為一個閉算子，並且其定義域 $\mathfrak{R}$ 稠密於 $\mathfrak{L}(\mathbf{R})$。

【證明】 設 f_n 為 $\mathfrak{L}(\mathbf{R})$ 中的序列並且令 $u_n = G_\alpha f_n$。於 $\mathfrak{L}(\mathbf{R})$ 中，令 $u_n \to v$，當 $n \to \infty$，且 $\mathcal{G} u_n = \alpha u_n - f_n - \alpha v - g$。因為 $f_n \to g$ 且 G_α 為一個有界算子，故 $G_\alpha f_n \to G_\alpha g$。因此由 $u_n = G_\alpha f_n$ 得到 $v = G_\alpha g$。從而得證 $v \in \mathfrak{R}$ 與 $\mathcal{G} v = \alpha v - g$，證畢。 #

下一個問題我們證明：給定 $\mathcal{G}$，可以建構算子半群 $\{P_t\}$，以 $\mathcal{G}$ 為母算子。我們再次警告一下，因為 $\mathcal{G}$ 是無界的，故指數映射 $\exp(t\mathcal{G}) = \Sigma_0^\infty (t^n/n!)\mathcal{G}^n$ 只是形式上的定義。下面定理給出指數映射的精確定義：

【定理 2.13】（K. Yosida, E. Hille）

設 A 為一個閉算子，其定義域稠密於 Banach 空間 E，再設對任意 $\alpha > 0$，預解 $G_\alpha = (\alpha I - A)^{-1}$ 存在且滿足

$$\|G_\alpha\| \leq \alpha^{-1}. \tag{2.97}$$

然則，存在唯一的算子半群 $\{P_t\}$ 以 A 為母算子，使得 $\|P_t\| \leq 1$。進一步 P_t 給如下：

$$\lim_{\alpha\to\infty} \exp(t\alpha A G_\alpha) = P_t. \tag{2.98}$$

【證明】 我們可以記 $A G_\alpha = \alpha G_\alpha - I$，並且注意到它是一個有界線性

算子。因此指數映射

$$\exp(t\alpha AG_\alpha)=P_t^{(\alpha)},\qquad \alpha>0,\ t\geq 0,$$

有意義。因為$G_\alpha I=I\,G_\alpha$，故有

$$\exp(t\alpha AG_\alpha)=\exp(t\alpha^2G_\alpha)\exp(-t\alpha I).$$

今由假設 $\|\alpha G_\alpha\|\leq 1$，得到

$$\|\exp(t\alpha AG_\alpha)\|\leq \exp(t\alpha)\exp(-t\alpha)=1. \tag{2.99}$$

當u屬於A的定義域$\mathfrak{D}(A)$時，我們有$G_\alpha Au$（$=-u+\alpha(\alpha I-A)^{-1}u$）$=AG_\alpha u$，並且$G_\alpha A$與$P_t^{(\beta)}$可交換：$G_\alpha AP_t^{(\beta)}u=P_t^{(\beta)}G_\alpha Au$。在這種情形下，$d/dt\ P_t^{(\alpha)}$存在且

$$\frac{d}{dt}P_t^{(\alpha)}u=\alpha AG_\alpha P_t^{(\alpha)}u=P_t^{(\alpha)}(\alpha AG_\alpha)u,$$

故我們證明了，當$u\in\mathfrak{D}(A)$時，

$$\begin{aligned}(P_t^{(\alpha)}-P_t^{(\beta)})u&=\int_0^t\frac{d}{ds}(P_{t-s}^{(\beta)}P_s^{(\alpha)}u)\,ds\\&=\int_0^t P_{t-s}^{(\beta)}P_s^{(\alpha)}(\alpha G_\alpha-\beta G_\beta)Au\,ds.\end{aligned}$$

由關係式$u=\alpha G_\alpha u-G_\alpha Au$與$\|G_\alpha Au\|\leq\alpha^{-1}\|Au\|$得到$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha u=u$。由假設$\|\alpha G_\alpha\|\leq 1$可證明$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha G_\alpha f=f$，$\forall f\in E$。利用這個結果，（2.99）及上述計算，可以證明

$$\|(P_t^{(\alpha)}-P_t^{(\beta)})u\|\to 0\quad 當\quad \alpha,\beta\to\infty$$

均勻地於任何有限t區間。因此（2.98）的極限存在，故P_t有意義。在（2.99）中令$\alpha\to\infty$，我們也可以證明P_tu對t連續，並且$\|P_t\|\leq 1$。在相應於$\{P_t^{(\alpha)}\}$的等式中，令$\alpha\to\infty$，很容易就可以證得半群性：

$$P_tP_s=P_sP_t=P_{t+s},\qquad s,t\geq 0$$

今證明這樣得到的半群之母算子就是A。對於$u\in\mathfrak{D}(A)$，因爲$P_t^{(\alpha)}$對t是可微分的，故我們有

$$P_t^{(\alpha)}u-u=\int_0^t P_t^{(\alpha)}\alpha G_\alpha Au\,dt$$

今令$\alpha\to\infty$，得到

$$P_tu-u=\int_0^t P_tAu\,dt,$$

從而$\lim_{t\to 0+}t^{-1}(P_t-I)u=Au$。如果記$\{P_t\}$的母算子爲$A'$，則我們已證明了$\mathfrak{D}(A')\supseteq\mathfrak{D}(A)$，並且$A'u=Au$，$\forall u\in\mathfrak{D}(A)$。今因$(\alpha I-A')^{-1}$與$(\alpha I-A)^{-1}$分別地必爲從$\mathfrak{D}(A')$與$\mathfrak{D}(A)$到$E$的蓋射，故有$\mathfrak{D}(A')=\mathfrak{D}(A)$。

只剩$\{P_t\}$的唯一性待證。假設存在另一個算子半群$\{P_t'\}$以A爲母算子，則對任意$u\in\mathfrak{D}(A)$，我們有

$$\begin{aligned}P_t'u-P_t^{(\alpha)}u&=-\int_0^t\frac{d}{ds}(P_{t-s}'P_s^{(\alpha)})u\,ds\\&=\int_0^t P_{t-s}'P_s^{(\alpha)}(A-\alpha G_\alpha A)u\,ds\to 0\quad\text{當}\quad\alpha\to\infty\end{aligned}$$

因此得證$P_t'=P_t$。 #

我們應用這個定理到時間齊性的Markov過程所相應的半群及其母算子。取Banach空間$E=\mathfrak{L}(\mathbf{R})$，令$A=\mathfrak{g}$，其中我們假設$\mathfrak{g}$滿足

$$(\mathfrak{g}1)(x)\equiv 0. \tag{2.100}$$

這個假設等價於$(\alpha G_\alpha 1)(x)\equiv 1$從而等價於

$$(P_t1)(x)\equiv 1. \tag{2.101}$$

今假設$\{X^{(i)}(t):t\in[0,\infty)\}$，$i=1,2$，爲兩個給定的Markov過程，並且由它們的遷移機率所誘導出的一參數算子半群$\{P_t^{(i)}\}$，

$i=1,2$。滿足(2.101)之條件。如果這兩個半群的母算子相等，包括定義域之相同，則定理2.13告訴我們$P_t^{(1)}=P_t^{(2)}$，$\forall\, t$。由(2.90)之定義知，這兩個過程的遷移機率

$$P^{(i)}(t,x,A)=(P_t^{(i)}\chi_A)(x),\ i=1,2,\quad A \text{ 爲}\mathbb{R}\text{的Borel子集},$$

必相同。這表示，當初期條件給定後，母算子決定了Markov過程。因此我們有下面的圖示：

$$\{X(t)\}\to\{P(t,x,A)\}\leftrightarrow\{P_t\}\to\{G_\alpha\}\to\mathfrak{g}$$

一般而言，一個母算子（及其定義域）比一族遷移機率容易掌握，甚至在形式上也較簡單。

今將Markov過程的一般理論應用到Wiener過程的特殊情形。我們已經知道，Wiener過程的遷移機率具有密度函數，它可以用Gauss核$g(t;x-y)$表示出來。爲了方便起見，我們用$g(0;x-y)$表示Dirac測度$\delta_0(x-y)$。爲了要得到Green算子G_α，$\alpha>0$，的明白表式，必須用到下面補題的基本演算。

【補題2.7】

將Gauss核$g(t;x-y)$視爲t的函數，則其Laplace變換存在且可表成下形：

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}g(t;x-y)\,dt=(2\alpha)^{-1/2}\exp[-(2\alpha)^{1/2}|x-y|],\ \alpha>0. \tag{2.102}$$

【簡略證明】 當$x>0$時，

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty t^{-1/2}\exp\left[-\alpha t-\frac{x^2}{2t}\right]dt\\
&=\exp[-(2\alpha)^{1/2}x](2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty t^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}[xt^{-1/2}-(2\alpha t)^{1/2}]^2\right\}dt\\
&=\exp[-(2\alpha)^{1/2}x](2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^\infty\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)\frac{du}{(2\alpha)^{1/2}}\\
&=(2\alpha)^{-1/2}\exp[-(2\alpha)^{1/2}x].
\end{aligned}$$

在最後的積分項中，積分的變數 u 取爲 $xt^{-1/2}-(2\alpha t)^{1/2}$。同理可處理 $x<0$ 的情形，此時取 $u=xt^{-1/2}+(2\alpha t)^{1/2}$。 #

【命題 2.14】

對任意固定的 $\alpha>0$ 與 $x\in\mathbf{R}$，$G_\alpha f(x)$ 可以利用 $\mathbf{R}$ 上的絕對連續測度

$$G(\alpha, x, dy) \equiv (2\alpha)^{-1/2} \exp[-(2\alpha)^{1/2}|x-y|]\, dy$$

表成

$$(G_\alpha f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) G(\alpha, x, dy)$$

$$= (2\alpha)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp[-(2\alpha)^{1/2}|x-y|]\, dy. \tag{2.103}$$

【證明】 由 Fubini 定理得到

$$(G_\alpha f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} g(t; x-y)\, dt,$$

再由上述補題，這又等於

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\{(2\alpha)^{-1/2} \exp[-(2\alpha)^{1/2}|x-y|]\}\, dy.$$

#

利用公式(2.103)可以給出 $\mathfrak{R}$，$\mathfrak{N}$ 與 g 的明白表式。

【定理 2.14】

1. 設 u 爲一函數定義爲 $u=G_\alpha f$，其中 $f\in\mathfrak{L}(\mathbf{R})$，則 $u'(x)$ 存在，$u(x)$ 與 $u'(x)$ 皆爲絕對連續，並且 $u''(x)=2\alpha u(x)-2f(x)$ 殆遍成立，其中 u'' 爲 u' 的密度函數。
2. 空間 $\mathfrak{R}$ 與 $\mathfrak{N}$ 給如下：

$\mathfrak{R} = \{u \in \mathfrak{L}(\mathbf{R})$: u, u' 皆爲絕對連續，$u'' \in \mathfrak{L}(\mathbf{R})\}$

$$\mathfrak{N} = \{f \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}): f(x) = 0, \text{ a.e.}\}.$$

3. $(\mathfrak{g}u)(x)=\frac{1}{2}u''(x)$ a.e., $u\in\mathfrak{N}$。

【證明】 1. 由公式(2,103)得知

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x}(2\alpha)^{-1/2}\exp[-(2\alpha)^{1/2}(x-y)]f(y)\,dy$$
$$+\int_{x}^{\infty}(2\alpha)^{-1/2}\exp[(2\alpha)^{1/2}(x-y)]f(y)\,dy,$$

從而得知 $u'(x)$ 存在且

$$u'(x)=-\exp[-(2\alpha)^{1/2}x]\int_{-\infty}^{x}\exp[(2\alpha)^{1/2}y]f(y)\,dy$$
$$+\exp[(2\alpha)^{1/2}x]\int_{x}^{\infty}\exp[-(2\alpha)^{1/2}y]f(y)\,dy.$$

由此表達式，我們可以證明 $u'(x)$ 爲絕對連續，並且其密度 $u''(x)$ 可表成下形

$$u''(x)=2\alpha u(x)-2f(x),\qquad \text{a.e.}$$

因爲 u，$f\in\mathfrak{L}(\mathbf{R})$，故 $u''\in\mathfrak{L}(\mathbf{R})$。

2. 在(1)的證明過程中，實際上已證明了 $\mathfrak{R}$ 被包含於 $\{u\in\mathfrak{L}(\mathbf{R}):u$，$u'$ 皆絕對連續 $u''\in\mathfrak{L}(\mathbf{R})\}$ 中，因此只需證明反過來的包含關係。設 u 爲如上述之函數，令 $f=\alpha u-\frac{1}{2}u''$。因爲 $f\in\mathfrak{L}(\mathbf{R})$，我們可以定義 $v=G_\alpha f$，並且利用(1)得到

$$v''(x)=2\alpha v(x)-2f(x),\qquad \text{a.e.}$$

因此差 $w=u-v$ 必滿足

$$w''(x)=2\alpha w(x),\qquad \text{a.e.,}$$

又因爲 u，v 爲連續，故 w 亦然。然而上式處處成立。解微分方程，通解形如 $w(x)=c_1\exp[(2\alpha)^{1/2}x]+c_2\exp[-(2\alpha)^{1/2}x]$。進一步由有界性得知 $c_1=c_2=0$，故得 $w=0$。從而 $u=G_\alpha f$，於

是(2)證畢。

關於 $\mathfrak{N}$ 的斷言很容易證明。事實上，若 $f \in \mathfrak{N}$，則 $u(x)=(G_\alpha f)(x)=0$。利用這個結果及方程式 $u''(x)=2\alpha u(x)-2f(x)$, a.e.，我們得知 $f(x)=0$，a.e. 反過來是顯然的。

3. 今假設 $u=G_\alpha f$。由定義，這表示 $\mathfrak{g}u=\alpha u-f \bmod \mathfrak{N}$ 成立。但是由(1)知 $\frac{1}{2}u''=\alpha u-f \bmod \mathfrak{N}$。因此

$$\mathfrak{g}u=\frac{1}{2}u'', \bmod \mathfrak{N},$$

這就證明了(8)。 #

根據先前的圖示，由 Wiener 過程的遷移機率出發，可得到算子半群 $\{P_t\}$ 與 Green 算子 $\{G_\alpha\}$，最後得到上述的母算子 $\mathfrak{g}$。利用 $\mathfrak{g}$ 及相關的子空間 $\mathfrak{R}$，$\mathfrak{N}$，就足夠來描述作為 Markov 過程的 Wiener 過程。現在我們來介紹 Dynkin 公式，它給出了母算子 $\mathfrak{g}$ 的機率解釋。這個公式建基在下面的 Dynkin 定理。

【定理 2.15】

設 σ 為一個 Markov 時刻。如果 $u(x)$ 定義為 $u=G_\alpha f$，其中 $f \in \mathfrak{C}(R)$，則它可表成下形

$$u(x)=E_x\left[\int_0^\sigma e^{-\alpha t}f(B(t))\,dt\right]+E_x[e^{-\alpha\sigma}u(B(\sigma))]. \tag{2.104}$$

【證明】 我們可以假設 $\sigma(\omega)<\infty$, a.e. (P)，由 (2.92) 得

$$\begin{aligned}u(x)&=E_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(B(t))\,dt\right]\\&=E_x\left[\int_0^\sigma e^{-\alpha t}f(B(t))\,dt\right]+E_x\left[\int_\sigma^\infty e^{-\alpha t}f(B(t))\,dt\right].\end{aligned}$$

今細究第二項：

$$
\begin{aligned}
E_x&\left[e^{-\alpha\sigma}\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(B(t+\sigma))\,dt\right] \\
&=\int_0^\infty e^{-\alpha t}E_x[e^{-\alpha\sigma}f(B(t+\sigma))]\,dt \\
&=\int_0^\infty e^{-\alpha t}E_x[e^{-\alpha\sigma}E_{B(\sigma)}\{f(B(t))\}\,dt \quad \text{by the str} \\
&=E_x\left[e^{-\alpha\sigma}\int_0^\infty E_{B(\sigma)}\{e^{-\alpha t}f(B(t))\}\,dt\right] \\
&=E_x[e^{-\alpha\sigma}u(B(\sigma))].
\end{aligned}
$$

由最後這一表式就得到公式(2.104)。 #

這個定理對於一般 Markov 過程亦成立，只要此過程具有強 Markov 性。

下述 Dynkin 公式是定理 2.15 的立即結論。

【推論】 設 σ 爲相應於Wiener 過程的Markov時刻，滿足 $E_x(\sigma)<\infty$。如果 $u\in\mathfrak{N}$，則

$$
E_x\left[\int_0^\sigma (\mathrm{g}u)(B(t))\,dt\right]=E_x[u(B(\sigma))]-u(x). \tag{2.105}
$$

【證明】 因爲 u 可以寫成 $u=G_\alpha f$，故由定理 2.15的公式：

$$
u(x)=E_x\left[\int_0^\sigma e^{-\alpha t}f(B(t))\,dt\right]+E_x[e^{-\alpha\sigma}u(B(\sigma))]
$$

及方程式 $f(x)=\alpha u(x)-\mathrm{g}u(x)$，a.e.，得到

$$
u(x)=E_x\left[\int_0^\sigma e^{-\alpha t}\{\alpha u(B(t))-(\mathrm{g}u)(B(t))\}\,dt\right]+E_x[e^{-\alpha\sigma}u(B(\sigma))].
$$

令 $\alpha\to\infty$，並且注意到由 $E_x(\sigma)<\infty$ 之假設可得 $P_x(\sigma<\infty)=1$，我們就得到Dynkin 公式(2.105)。 #

【例子】 設 σ_ϵ 表示Wiener 過程由 x 點出發首次逃離區間[$x-\epsilon$, $x+\epsilon$] , $\epsilon>0$, 的時刻。如上節之例 1 ,我們可以證明 σ_ϵ 爲一個Markov 時刻。由Wiener 過程的對稱性,容易看出 $P_x(W(\sigma_\epsilon)=x+\epsilon)=P_x(W(\sigma_\epsilon)=x-\epsilon)=½$ 。進一步,由於Wiener過程的分佈在時空變換之下是不變的[參見命題 2.1 (B)] ,我們看出 $E(\sigma_\epsilon)=C\epsilon^2$ 其中 C 爲正的常數。[事實上,可以證明 C 等於 1 ,見Dynkin與Yushkevich (1969) 第 2 章] 。因此我們有

$$E_x\left[\int_0^{\sigma_\epsilon}(gu)(B(t))\,dt\right]=\frac{1}{2}[u(x+\epsilon)+u(x-\epsilon)]-u(x). \tag{2.106}$$

今我們知道,當 $\epsilon\to 0$ 時, $\sigma_\epsilon\to 0$ a.e. ,因此我們看出當 gu 在 x 點連續且 $\epsilon\to 0$ 時,(2.106) 式的左項等於 $\sigma_\epsilon((gu)(x)+o(1))$ 。將 (2.106) 式之兩邊同除以 $E(\sigma_\epsilon)=\epsilon^2$,且令 $\epsilon\to 0$,我們得到 $(gu)(x)=½u''(x)$ 。

利用 $g=½\,d^2/dx^2$ 的事實,如何應用定理 2.13 來造出 $\{P_t\}$ 是件有趣的事,現在我們就來做這件事。首先考慮微分方程

$$\alpha u-\frac{d^2}{dx^2}u=f.$$

因爲這個方程式的Green 函數是週知的Gauss 核 $g_\alpha(x-y)=(2\alpha)^{-1/2}\exp[-(2\alpha)^{1/2}|x-y|]$,我們很容易看出預解 $G_\alpha=(\alpha-g)^{-1}$ 給如 (2.103) 式。利用這個公式我們可以明白地求算出指數映射 $\exp(t\alpha gG_\alpha)$,作形式Taylor 級數展開

$$\exp(t\alpha gG_\alpha)f=\sum_0^\infty\frac{(t\alpha)^n}{n!}\left(\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\right)^n G_\alpha^n f,\qquad f\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}). \tag{2.107}$$

右項中的 G_α^n 表示一個以 g_α^n 爲核之積分算子,其中 g_α^n 爲 g_α 的 n 重卷積 (n-fold convolution) 。因爲 g_α 的Fourier 變換爲 $2(2\pi)^{-1/2}(\lambda^2+2\alpha)^{-1}$,故 g_α^n 的 Fourier 變換必爲 $2^n(2\pi)^{-1/2}(\lambda^2+2\alpha)^{-n}$,其Fourier 逆變換定義了 G_α^n 的核。今只需將 G_α^n 作用到 f ,並且求出 $2n$ 階導數就好了。

這個操作等價於一個積分算子，其核爲g^{α}_{λ}的Fourier變換與$(-\lambda^2)^n$之乘積再作Fourier逆變換。因此(2.107)的右項可表成下形：

$$\sum_0^{\infty}\frac{(t\alpha)^n}{n!}\mathscr{F}^{-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\lambda^2\right)^n(2\pi)^{-1/2}2^n(\lambda^2+2\alpha)^{-n}\right]\cdot f$$

$$=(2\pi)^{-1/2}\mathscr{F}^{-1}\left[\sum_0^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}t\lambda^2\right)^n(2\alpha)^n(\lambda^2+2\alpha)^{-n}\right]\cdot f$$

$$\to\int_{-\infty}^{\infty}g(t;x-y)f(y)\,dy \quad 當 \quad \alpha\to\infty.$$

上述中的$\mathscr{F}^{-1}$表示Fourier逆變換。因此我們已證明了遷移機率的密度爲$g(t;x-y)$。

我們作最後一個註解。到目前爲止，我們取基本的Banach空間爲$\mathfrak{L}(\mathbf{R})$，但是如所週知的，對於某類型的Markov過程，相應的$\{P_t\}$是$\mathscr{C}_0$上的連續線性算子（參見第1.3節；Banach空間$\mathscr{C}_0$是由所有連續函數在$\pm\infty$取值爲0所組成的，並且取均勻收斂位相）。Wiener過程當然是這類Markov過程，這可由遷移機率密度$g(t;x-y)$的性質很容易看出來。Hille-Yosida定理當然可以應用到這種情形，此時空間$\mathfrak{N}$變成無聊空間，由零函數構成。指數映射也變得更簡單。

但是對於比Wiener過程還一般的Markov過程，必須作更深入的討論，才能找出P_t爲$\mathscr{C}_0$上的算子之條件。我們也要討論相異於Wiener過程但是却跟Wiener過程有關係的Markov過程。爲此，在本節我們只發展空間$\mathfrak{L}(\mathbf{R})$上的一般Markov過程論。

2-6 跟Wiener過程有關的過程

現在我們來討論由Wiener過程經保持Markov性的變換得到的一些過程。

[1] 具有反射式障礙的Wiener過程

考慮這樣的過程：由點$a(>0)$出發的Wiener過程$\{W(t)+a: t\geq 0\}$，當它碰到原點0時就反射，而在開區間$(0,\infty)$內的行爲是標準的

Wiener 過程。這個過程可以建構如下：

$$X(t,\omega)=|B(t,\omega)+a|,\qquad t\geq 0. \tag{2.108}$$

記 $\mathbf{B}_t(X)$ 爲 $\mathbf{B}_t^+$，我們看出 $\mathbf{B}_t^+\subseteq \mathbf{B}_t(=\mathbf{B}_t(W))$。

【命題2.15】

由（2.108）所定義的過程 $\{X(t):t\geq 0\}$ 爲一個Markov過程。

【證明】 我們注意到，對於 $\mathbf{R}^+=[0,\infty)$ 的任意Borel子集 A，事件 $\{X(t)\in A\}$ 可表爲 $\{W(t)+a\in A\cup(-A)\}$，其中 $-A=\{-x: x\in A\}$。給定 $t>s=s_0>s_1>\cdots>s_n$，再取 $\mathbf{R}^+$ 的Borel 子集 A_1，A_2，… A_n、A。進一步令

$$C=(X(s_n)\in A_n,\ldots,X(s_1)\in A_1,X(s)\in A_0).$$

集合 C 屬於 $\mathbf{B}_s^+$，故有

$$\begin{aligned}\int_C P(X(t)\in A\,|\,\mathbf{B}_s^+)\,dP&=\int_C \chi_{(X(t)\in A)}\,dP\\&=P(B(s_n)+a\in A_n\cup(-A_n),\ldots,B(s)\\&\qquad+a\in A_0\cup(-A_0),B(t)+a\in A\cup(-A)).\end{aligned}$$

剩下的證明完全跟（2.65）一樣。利用 Wiener 過程的遷移機率密度，可看出上述的機率

$$=\int_C P(X(t)\in A\,|\,X(s))\,dP$$

這就證明了命題的斷言。 #

因爲Wiener過程的樣本函數是連續的，故 $\{X(t)\}$ 的樣本函數亦然。因此 $\{X(t)\}$ 的分佈爲空間 $\mathscr{C}^+=\mathscr{C}^+([0,\infty))=\{x\in\mathscr{C}: x(t)\geq 0\}$ 上的一個機率測度。如果我們定義一個從 $\mathscr{C}=\mathscr{C}([0,\infty))$ 到 $\mathscr{C}^+$ 的映射 γ 爲

$$(\gamma x)(t)=|x(t)|,\qquad x\in\mathscr{C}, \tag{2.109}$$

再令 $\mathfrak{B}$ 與 $\mathfrak{B}^+$ 分別爲 $\mathscr{C}$ 與 $\mathscr{C}^+$ 的柱集所生成的 σ 環，則 γ 爲從（$\mathscr{C}$，$\mathfrak{B}$）到（$\mathscr{C}^+$，$\mathfrak{B}^+$）的可測映射。因此（$\mathscr{C}$，$\mathfrak{B}$）上的條件Wiener測度 μ_a^W 經由 γ 誘導出（$\mathscr{C}^+$，$\mathfrak{B}^+$）的一個機率測度 $\gamma_a = \gamma^{-1}$ 。μ_a^W，亦即

$$\nu_a(B) = \mu_a^W(\gamma^{-1}(B)), \qquad B \in \mathfrak{B}^+. \tag{2.110}$$

這樣得到的機率空間（$\mathscr{C}^+$，$\mathfrak{B}^+$，γ_a）爲 $\{X(t)\}$ 的分佈。對於這個分佈我們現在用遷移機率 $P^+(s, x; t, A)$ 來明白表示出來。

如前述，我們令 $g(t; x)$ 表Gauss核。再令

$$\int_A g(t; x-y)\,dy = G(t, x, A).$$

顯然 $P(X(t) \in A) = G(t, a, A \cup (-A))$。

【命題 2.16】

Markov過程 $\{X(t)\}$ 是時間齊性的，具有遷移機率爲

$$P^+(s, x, t, A) = G(t-s, x, A \cup (-A)), \qquad t > s, \tag{2.111}$$

並且遷移機率密度爲 $g(t-s; x-y) + g(t-s; x+y)$。

【證明】 設 A 與 B 爲 $\mathbf{R}^+$ 的Borel子集，則有

$$\begin{aligned}
&\int_{\{X(s) \in B\}} P(X(t) \in A \mid X(s))\,dP \\
&\quad = P(X(s) \in B, X(t) \in A) \\
&\quad = \int_{B \cup (-B)} \int_{A \cup (-A)} g(s; a-y) g(t-s; y-z)\,dy\,dz \\
&\quad = \int_{B \cup (-B)} g(s; a-y)\{G(t-s, y, A) + G(t-s, y, -A)\}\,dy \\
&\quad = \int_B G(t-s, y, A \cup (-A)) P(X(s) \in dy),
\end{aligned}$$

由此得證（2.111）。關於密度函數的斷言則是顯然的。 #

由於這個命題，現在我們可以用記號 $P^+(t-s, x, A)$ 以取代 $P^+(s, x, t, A)$，並且 Chapman-Kolmogorov 方程可以表成下形：

$$\int_0^\infty P^+(s, x, dy)P^+(t, y, A) = P^+(s+t, x, A). \tag{2.112}$$

現在我們轉而討論相應於 $\{X(t): t \geq 0\}$ 的算子半群。令 $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^+)$ 表示由所有定義在 $\mathbf{R}^+$ 上的有界可測函數所成的 Banach 空間，取 sup 範數。在 $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^+)$ 上定義線性算子 P_t^+ 爲

$$(P_t^+ f)(x) = \int_0^\infty f(y)P^+(t, x, dy), \qquad f \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^+). \tag{2.113}$$

如同前述，$\{P_t^+: t \geq 0\}$ 構成了一參數算子半群。我們有興趣於考察它跟 $\{P_t\}$ 的關係。首先我們將任意 $f \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^+)$ 延拓成對稱函數 $\hat{f}$，定義爲

$$\hat{f}(y) = \begin{cases} f(y) & y \geq 0, \\ f(-y) & y < 0. \end{cases}$$

顯然 $\hat{f} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R})$，並且 Wiener 過程所相應的算子 P_t 可以作用它。

【命題 2.17】

對於任意 $f \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^+)$ 我們有

$$(P_t^+ f)(x) = (P_t \hat{f})(x), \qquad x \geq 0. \tag{2.114}$$

【證明】 由簡單計算

$$\begin{aligned}(P_t^+ f)(x) &= \int_0^\infty f(y)\{g(t; x-y) + g(t; x+y)\}\, dy \\ &= \int_0^\infty f(y)g(t; x-y)\, dy + \int_{-\infty}^0 f(-y)g(t; x-y)\, dy \\ &= (P_t \hat{f})(x), \text{ 若 } x \geq 0.\end{aligned}$$

這就得證了。

【註】 P_t將對稱函數映至對稱函數。特別地

$$(P_t \hat{f})(-x) = (P_t \hat{f})(x).$$

透過(2.114)的關係式，$\{P_t^+\}$的許多性質可由$\{P_t\}$的推得(參見定理2.11)，此地我們不再敍述。

我們記$\{X(t)\}$的Green算子爲G_α^+，定義爲

$$(G_\alpha^+ f)(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}(P_t^+ f)(x)\, dt.$$

由命題2.17立即得到

$$(G_\alpha^+ \hat{f})(x) = (G_\alpha \hat{f})(x), \qquad x \geq 0. \tag{2.115}$$

並且G_α^+滿足預解方程。這就證明了$G_\alpha^+(\mathfrak{L}(\mathbf{R}^+))$跟$\alpha$無關，故可記成$\mathfrak{R}^+$。如果$f \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^+)$，則$\hat{f} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R})$，於是$u = G_\alpha \hat{f} \in \mathfrak{R}$，從而$u'$存在。由上面的註可知，$(G_\alpha \hat{f})(x)$也是一個對稱函數，即$u(-x) = u(x)$。因爲$u'$連續，$u'(0)$必爲0。將$u$局限到$[0, \infty)$上，亦即視$u$爲$G_\alpha^+ f$，我們可推得$u'(0+) = 0$。這個結果對於$\mathfrak{R}^+$的每一元素都成立。

反過來，給$u \in \mathfrak{R}$滿足$u'(0+) = 0$，則存在一個對稱的$f \in \mathfrak{L}(\mathbf{R})$使得$\hat{u} = G_\alpha f$。如果局限$f$到$[0, \infty)$上，則$u$可表成$u = G_\alpha^+ f$之形，且屬於$\mathfrak{R}^+$。前述的觀測提供給我們$\mathfrak{R}^+$，$\mathfrak{N}^+$及母算子$\mathfrak{g}^+$的描述，如下：

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^+ &= G_\alpha^+ \mathfrak{L}(\mathbf{R}^+) \\ &= \{u \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^+): u, u' \text{ 爲絕對連續 } u'' \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^+), u'(0+) = 0\}.\end{aligned} \tag{2.116}$$

G_α^+的核$\mathfrak{N}^+$爲

$$\mathfrak{N}^+ = \{f \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^+): f(x) = 0, \quad \text{a.e.}\} \tag{2.117}$$

如同第2.5節中所討論的情形。

母算子$\mathfrak{g}^+$的獲得，類似於(2.95)。這個算子使得對$u \in \mathfrak{R}^+$滿足

$$\mathfrak{g}^+ u = \alpha u - (G_\alpha^+)^{-1} u, \qquad \text{mod } \mathfrak{N}^+. \tag{2.118}$$

於是可看出，若將定義在$\mathbf{R}^+$上的f與u延拓成$\mathbf{R}$上的對稱函數，則$\mathcal{G}^+$的形式跟 Wiener 過程的母算子$\mathcal{G}$一樣，因此可化約成 Wiener 過程來討論。總結上述，得到：

【命題 2.18】

1. 空間$\mathfrak{R}^+=G_\alpha^+\mathfrak{L}(\mathbf{R}^+)$與$G_\alpha^+$的核$\mathfrak{N}^+$皆跟$\alpha$無關，並且分別由(2.116)，(2.117)所給定。
2. 母算子$\mathcal{G}^+$的作用如下：

$$(\mathcal{G}^+u)(x)=\tfrac{1}{2}u''(x),\qquad \text{a.e.}\qquad x\geq 0.$$

在上一節的例子我們已看過，一個擴散過程(即強 Markov過程具有連續樣本路徑)的母算子在空間中局部決定。上述的過程$\{X(t)\}$確是一個擴散過程，並且在開區間$(0,\infty)$中運動，其樣本路徑的局部行爲跟 Wiener 過程相同。因此，很自然地$\mathcal{G}^+$與Wiener 過程的母算子一致。

[2] Kac 公式及其一些應用

本小節我們要來建立Kac 公式，這是M. Kac 有關於 Brown 泛函的工作。我們還要利用它來探討 Wiener 過程的進一步性質及 Wiener 過程的變換。

令$V(x)$爲$\mathbf{R}$上的有界，非負可測函數並且令E_x表示相對於由x點出發的Wiener過程取期望值。例如$E_x\{f(W(t))\}=E\{f(W(t)+x)\}$。今假設$\alpha>0$且$f\in\mathfrak{L}(\mathbf{R})$，令

$$v(x)=E_x\left\{\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(B(t))\exp\left[-\int_0^t V(B(s))\,ds\right]dt\right\}. \tag{2.119}$$

因爲在大括號$\{\cdot\}$中的積分存在，並且對ω而言是均勻有界，故$v(x)\in\mathfrak{L}(\mathbf{R})$。仍然保留上節關於Wiener過程的記號$\mathfrak{R}$與$\mathcal{G}$，我們有

【定理 2.16】 (M. Kac)

(2.119)所定義的函數$v(x)\in\mathfrak{R}$且滿足

$$(\alpha-\mathcal{G}+V(x))v(x)=f(x)\qquad \text{a.e.} \tag{2.120}$$

【證明】　繼續使用先前的記號，我們令

$$u(x)=(G_\alpha f)(x)=E_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(W(t))\,dt\right].$$

由分部積分得到下面的等式

$$-\int_0^t V(W(s))\exp\left[-\int_s^t V(W(\tau))\,d\tau\right]ds=\exp\left[-\int_0^t V(W(s))\,ds\right]-1$$

於是

$$v(x)-u(x)=-E_x\left\{\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(W(t))\int_0^t V(W(s))\exp\left[-\int_s^t V(W(\tau))\,d\tau\right]ds\,dt\right\}.$$

再注意到

$$\int_0^\infty\left\{\int_0^t\left|e^{-\alpha t}f(W(t))V(W(s))\exp\left[-\int_s^t V(W(\tau))\,d\tau\right]\right|ds\right\}dt$$

$$\leq\int_0^\infty \|f\|\,\|V\|\,te^{-\alpha t}\,dt<\infty,$$

故可利用 Fubini 定理，求得 $v(x)-u(x)$ 如下：

$$-E_x\left\{\int_0^\infty V(W(s))\,ds\int_s^\infty e^{-\alpha t}f(W(t))\exp\left[-\int_s^t V(W(\tau))\,d\tau\right]dt\right\}$$

$$=-E_x\left\{\int_0^\infty V(W(s))\,ds\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^\infty e^{-\alpha(t+s)}f(W(t+s))\exp\left[-\int_s^{t+s}V(W(\tau))\,d\tau\right]dt\right\}$$

$$=-\int_0^\infty e^{-\alpha s}\,ds E_x\left\{V(W(s))\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(W(t+s))\exp\left[-\int_0^t V(W(\tau+s))\,d\tau\right]dt\right\}$$

$$=-\int_0^\infty e^{-\alpha s}\,ds E_x\left\{V(W(s))\right.$$

$$\left.\cdot E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(W(t+s))\exp\left[-\int_0^t V(W(\tau+s))\,d\tau\right]dt\,\middle|\,\mathbf{B}_s\right)\right\}$$

$$= -\int_0^\infty e^{-\alpha s}\, ds E_x\Big\{V(W(s))$$

$$E_{W(s)}\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(W(t)) \exp\Big[-\int_0^t V(W(\tau))\, d\tau\Big]\Big)\Big\}$$

$$= -\int_0^\infty e^{-\alpha s}\, ds E_x\{V(W(s))v(W(s))\}$$

$$= -G_\alpha(V\cdot v)(x),$$

其中 $(V\cdot v)(x)=V(x)v(x)$。因此 $u-v\in\mathfrak{R}$，從而 $v\in\mathfrak{R}$。復次，由上述的計算得到

$$G_\alpha^{-1}(v-u) = -V\cdot v,\ \mathrm{mod}\ \mathfrak{N},$$

$$(\alpha-\mathfrak{g})v-(\alpha-\mathfrak{g})u = -V\cdot v,\ \mathrm{mod}\ \mathfrak{N}.$$

今利用 $(\alpha-\mathfrak{g})u=f$ 得到

$$(\alpha-\mathfrak{g})v - f = -V\cdot v, \qquad \text{a.e.},$$

這就證明了(2.120)。 #

【註】 在微分方程(2.120)中令 f 爲連續，且 $\mathfrak{g}=\frac{1}{2}d/dx^2$，則其解答給如(2.119)。事實上，這個解答我們已由機率手法建構出來。

令 $\mathfrak{g}^V=\mathfrak{g}-V$，我們可將(2.120)改寫成

$$(\alpha-\mathfrak{g}^V)v=f. \tag{2.121}$$

此式可以跟(2.96)：$(\alpha-\mathfrak{g})u=f$ 作比較，於是類似於Wiener過程的情形，我們要問：是否存在一個Markov過程以 $\mathfrak{g}^V$ 爲母算子？更明確地說，我們要問：是否存在相應於Markov過程的遷移機率 $\{P^V(t,x,A)\}$ 之一參數算子半群 $\{P_t^V\}$，使得 $(P_t^V f)(x)=\int f(y)P^V(t,x,dy)$ 並且具有母算子 $\mathfrak{g}^V=(d/dt\ P_t^V)|_{t=0}$。答案是肯定的，但是要詳述這些必須對Markov過程作更多的預備，故不適合在此講述。因此我們要略去這個論題，有興趣的讀者可參見〔K. Itô 與 H. P. Mckean Jr.(1965)與 W. Feller(1966)〕。此地我們只討論不需要深入預備知識的特殊情形，這

已足夠對一般理論作一瞥。

考慮 $V(x) \equiv \lambda$ 的情形，其中 λ 爲一個正的常數。在 Wiener 過程的情形，我們知道指數映射 $\exp(t\mathrm{g})=P_t$ 是有意義的。利用這個結果以及母算子 g 與 λ（$=\lambda I$，I 爲單位映射）可交換的性質，就得到

$$\exp[t(\mathrm{g}-\lambda)] = e^{-\lambda t}\exp(t\mathrm{g}) = e^{-\lambda t}P_t.$$

如果記此表式爲 P_t^V，並且求得 $\{P^V(t,x,A)\}$，則不難看出 $P^V(t,x,A)$ 是由 Wiener 過程的遷移機率 $\{P(t,x,A)\}$ 得來的：

$$P^V(t,x,A) = e^{-\lambda t}P(t,x,A), \qquad t \geq 0.$$

顯然 P^V 滿足Markov遷移機率的所有性質，故存在一個時間齊性的Markov過程，以 P^V 爲遷移機率，如果初期分佈亦給定，則又是唯一的。這個過程與Wiener 過程之間的關鍵性差異在於總質量爲 $P^V(t,x,\mathbf{R})=e^{-\lambda t}P(t,x,\mathbf{R})=e^{-\lambda t}$。此地"粒子以指數率 λ 消失"並且在 0 到 t 時刻之間的"消失"比率爲 $1-e^{-\lambda t}$。對於一般函數 $V(x)$ 的情形，"粒子消失的比率"與"粒子所在的位置"有關，此時參數用函數 $V(x)$ 來取代，但 P^V 不再有上述簡單的形式。

另一個簡單的例子是，對Wiener過程再加上漂移（drift）的考慮。讓我們考慮一個擴散過程，具有母算子 $\mathrm{g}+b(d/dx)$，其中 b 爲一常數。$b(d/dx)$ 項解釋成常數的漂移，因爲它與 $\mathrm{g}=\frac{1}{2}d^2/dx^2$ 可交換，故對應於母算子 $\mathrm{g}+b(d/dx)$ 的一參數算子半群 $\{\widetilde{P}_t\}$ 爲

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_t &= \exp\left\{t\left(\mathrm{g}+b\frac{d}{dx}\right)\right\} = \exp\left(bt\frac{d}{dx}\right)\exp(t\mathrm{g})\\ &= S_{-bt}\exp(t\mathrm{g}),\end{aligned}$$

其中 S_a 表移位算子（shift operator），定義爲 $(S_a f)(x)=f(x-a)$。這個移位算子將會重新介紹並且進一步討論。算子 $\widetilde{P}_t$ 的作用使得 $(\widetilde{P}_t f)(x)=(P_t f)(x+bt)$，這是一個積分算子，以遷移機率密度 $g(t;x-y+bt)$ 爲核。

現在回到Kac 公式，我們給出兩個重要例子，都是M.Kac（1951）所

作的。

【例1】

取定理2.16中的函數$V(x)$爲

$$V(x)=\begin{cases}\beta & x>0,\ (\beta>0\ \text{爲常數});\\ 0 & x\le 0.\end{cases} \tag{2.122}$$

利用同樣的常數β，我們定義函數$\Phi(t)$爲

$$\Phi(t)=\beta^{-1}\int_0^t V(W(s))\,ds. \tag{2.123}$$

一個集$B\subseteq \mathbf{R}$的Lebesgue測度記爲$|B|$，我們看出$\Phi(t)$恰好就是$|\{s\le t\ ;W(s)>0\}|$。在(2.119)中令$f\equiv 1$，得到

$$v(x)=E\left\{\int_0^\infty e^{-\alpha t}\exp\left[-\int_0^t V(W(s))\,ds\right]dt\right\},$$

這個函數滿足

$$\begin{cases}\left(\alpha+\beta-\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dx^2}\right)v(x)=1 & x>0,\\ \left(\alpha-\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dx^2}\right)v(x)=1 & x<0,\end{cases} \tag{2.124}$$

其中已用$\mathfrak{g}=\frac{1}{2}d^2/dx^2$代入。這個方程的通解$v(x)$可表成下形

$$v(x)=\begin{cases}(\alpha+\beta)^{-1}+A_1\exp[-2^{1/2}(\alpha+\beta)^{1/2}x]+A_2\exp[2^{1/2}(\alpha+\beta)^{1/2}x], & x>0\\ \alpha^{-1}+B_1\exp[-(2\alpha)^{1/2}x]+B_2\exp[(2\alpha)^{1/2}x], & x<0,\end{cases}$$

其中A_1，A_2，B_1與B_2爲適當常數。復次，因爲$v\in\mathfrak{R}$，故$v(x)$爲一個連續函數並且$v'(x)$在$x=0$點連續，因此必有

$$v(0)=\{\alpha(\alpha+\beta)\}^{-1/2}.$$

由定義我們有

$$v(0)=E_0\left\{\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\exp[-\beta\Phi(t)]\,dt\right\}$$

並且也可推出下列等式：

$$\{\alpha(\alpha+\beta)\}^{-1/2}=\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\left\{\int_0^t e^{-\beta s}\{\pi(t-s)(\pi s)\}^{-1/2}\,ds\right\}dt.$$

由Laplace變換的唯一性定理，可得等式

$$E_0\{\exp[-\beta\Phi(t)]\}=\pi^{-1}\int_0^t e^{-\beta s}\{s(t-s)\}^{-1/2}\,ds.$$

因爲左項爲$\Phi(t)$之Laplace變換，上面等式證明了，$\Phi(t)$的分佈函數$F_t(s)$爲絕對連續，具有密度

$$\frac{dF_t(s)}{ds}=\pi^{-1}\{s(t-s)\}^{-1/2}=\frac{d}{ds}\left[2\pi^{-1}\arcsin\left(\frac{s}{t}\right)^{1/2}\right],\qquad 0\le s\le t. \tag{2.125}$$

因此我們已推導出在正半軸上逗留時間的分佈之反正弦定律。

【例2】

今利用例1的方法，我們給出推導$M(t)$的分佈之另一個方法。對任意常數$a>0$，令

$$V_a(x)=\begin{cases}0 & x<a,\\ 1 & x\ge a.\end{cases} \tag{2.126}$$

容易看出

$$\lim_{\lambda\to\infty} E_0\left\{\exp\left[-\lambda\int_0^t V_a(W(s))\,ds\right]\right\}=P_0\left(\max_{0\le s\le t} W(s)<a\right) \tag{2.127}$$

並且我們已經知道給如下的函數v

$$v(x)=E_x\left\{\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\exp\left[-\lambda\int_0^t V_a(W(s))\,ds\right]\right\}$$

滿足微分方程（$g-\alpha-\lambda V_a$）$v=1$。亦即

$$\begin{cases}\frac{1}{2}v''(x)-\alpha v(x)=1 & x<a,\\ \frac{1}{2}v''(x)-(\alpha+\lambda)v(x)=1 & x>a.\end{cases}$$

如例1，我們解此方程，得到

$$v(0)=\alpha^{-1}\left(1-\exp[-a(2\alpha)^{1/2}]\left\{1-\left[\frac{\alpha}{(\alpha+\lambda)}\right]^{1/2}\right\}\right).$$

令 $\lambda\to\infty$，並且注意到（2.127），我們就得到$M(t)=\max_{0\le s\le t}W(s)$的分佈的一個公式

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}P(M(t)<a)\,dt=\alpha^{-1}\{1-\exp[-a(2\alpha)^{1/2}]\},$$

因此

$$P(M(t)<a)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{at^{-1/2}}\exp\left[-\frac{u^2}{2}\right]du$$
$$=2(2\pi t)^{-1/2}\int_0^a\exp\left[-\frac{x^2}{2t}\right]dx,$$

結果跟命題2.9一致。

這個例子可以推廣如下：令

$$m(t)=\min_{0\le s\le t}B(s)\tag{2.128}$$

並且取函數V爲

$$V_{ab}(x)=\begin{cases}0 & -b<x<a \quad (a>0,\ b>0)\\ 1 & x\le -b \ \text{或}\ x\ge a.\end{cases}\tag{2.129}$$

我們可以求得聯合分佈$P(-b\leq m(t)\leq M(t)<a)$。證明這個結果跟命題2.10的特殊情形一致，是一個很好的習題。

[3] Brown橋

取一個由點x出發的Wiener過程，這個運動可由$W(t)+x$加以實現。我們希望將它“變形”使得在固定的時刻t_0經過固定點y。換言之，我們有興趣於將一個Brown粒子的運動作修飾，在時間區間$[0,t_0]$的端點作限制。要建構這個過程有許多辦法，一些典型的方法如下：(a)給過程$\{W(t)+x: t\in[0,t_0]\}$並且固定y，我們可以引入，在條件$\{W(t_0)+x=y\}$之下的條件分佈。這將唯一決定所欲的過程。(b)利用第2.3節[1]的方法在$[0,t_0]$上建構Wiener過程，但是用來定義$W(t,\omega)$的$X_1(\omega)$取為常數$y-x$。雖然時間區間延展於$[0,t_0]$而不同於第2.3節的單位區間，但是一切的論證是相同的。(c)條件Wiener測度μ_x^W局限到$\mathscr{C}(t_0)=\mathscr{C}([0,t_0])$上並且條件機率測度$\mu_{(0,x)}^{(t_0,y)}$取使得

$$\mu_x^W(\cdot)=\int \mu_{(0,x)}^{(t_0,y)}(\cdot)(2\pi t_0)^{-1/2}\exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2t_0}\right]dy.$$

於是測度$\mu_{(0,x)}^{(t_0,y)}$為我們所討論的過程之分佈。下面我們採取(b)的作法，它用到了Wiener過程可以由獨立Gauss隨機變數逐步作內插而得到這個重要性質。

如上面(b)所述，我們假設$\{W(t): t\in[0,t_0]\}$已由第2.3節[1]的方法建構出來，其中$X_1(\omega)$取值$y-x$。我們加上x得到

$$\begin{aligned}X(t,\omega)&=W(t,\omega)+x-\frac{t}{t_0}\{W(t_0,\omega)-y+x\}\\&=W(t,\omega)-\frac{t}{t_0}W(t_0,\omega)+\frac{t_0-t}{t_0}x+\frac{t}{t_0}y,\qquad 0\leq t\leq t_0.\end{aligned}\tag{2.130}$$

顯然$\{X(t)\}$為一個Gauss過程滿足限制條件$X(0)=x$，$X(t_0)=y$，故在某種意義下，它是一種條件Wiener過程。由於$\{X(t)\}$為Gauss過程，故它由其平均值與協變異函數所唯一決定（第1.6節定理1.10）：

$$m(t)=E\{X(t)\}=\frac{t_0-t}{t_0}x+\frac{t}{t_0}y,$$
$$\Gamma(t,s)=E[\{X(t)-E(X(t))\}\{X(s)-E(X(s))\}]=s\frac{t_0-t}{t_0},\qquad s<t. \tag{2.131}$$

【定義 2.8】

一個Gauss過程的平均值$m(t)$與協變異函數$\Gamma(t,s)$形如(2.131)者，稱爲一個Brown橋或束縛Wiener過程。

(2.130)所定義的過程$\{X(t)\}$爲Brown橋的一個實現，若只是牽涉到Brown橋的分佈之性質，這個過程就已足夠提供給我們必要的訊息。

一個Brown橋跟時間區間$[0,t_0]$及出發點x與終點y的取法都有關係。如果必須顯示出這些關係，我們就用記號$\{X^{(t_0;x,y)}_{(0;x)}(t):t\in[0,t_0]\}$來表示；否則就將上下指標都省略不寫。

【命題 2.19】

Gauss過程$\{X^{(t_0;y)}_{(0;x)}(t):t\in[0,t_0]\}$與$\{X^{(t_0;x)}_{(0;y)}(t):t\in[0,t_0]\}$具有相同的分佈。

【證明】 $X^{(t_0;x)}_{(0;y)}(t_0-t)$的期望值跟$X^{(t_0;y)}_{(0;x)}(t)$的相同，皆爲$[t_0-(t_0-t)]y/t_0+(t_0-t)x/t_0$；另外，過程$\{X^{(t_0;x)}_{(0;y)}(t_0-t)\}$的協變異函數與$x$，$y$無關，並且與$\{W(t_0-t)-[(t_0-t)/t_0]W(t_0)\}$的相同。由簡單的計算可知後者等於(2.131)中的$\Gamma(t,s)$，證畢。#

【命題 2.20】

Brown橋爲一個Markov過程。

【證明】 取s，t，$0<s<t<t_0$，記$X^{(t_0;y)}_{(0;x)}(t)$爲下形

$$X(t)=\frac{t_0-t}{t_0-s}X(s)+\{X(t)-\frac{t_0-t}{t_0-s}X(s)\}. \tag{2.132}$$

在大括號{ }中的隨機變數與$X(\tau)$，$\tau\le s$，的協變異數爲

$$\frac{t(t_0-t)}{t_0}-\left[\frac{(t_0-t)}{t_0-s}\right]t\frac{(t_0-s)}{t_0}=0,$$

故這兩隨機變數是獨立的。因此括號中的隨機變數獨立於 $\mathbf{B}_s(X)$。顯然 $[(t_0-t)/(t_0-s)]X(s)$ 爲 $\mathbf{B}_s(X)$ 可測，故有

$$E\{X(t)|\mathbf{B}_s(X)\}=\frac{t_0-t}{t_0-s}X(s).$$

這表示 $\{(t_0-t)^{-1}X(t)\}$ 爲加法過程，從而 $\{X(t)\}$ 爲Markov過程。

#

今將過程 $X(t)$ 標準化，使其平均值爲0，變異數爲1，因爲 $X(t)$ 的變異數爲 $t(t_0-t)/t_0$，由（2.131）知，標準化過程 $Y(t)$ 爲

$$Y(t,\omega)=t_0^{1/2}\{t(t_0-t)\}^{-1/2}\left[X(t,\omega)-\left\{\frac{t_0-t}{t_0}\right\}x-\frac{t}{t_0}y\right],\qquad 0<t<t_0. \tag{2.133}$$

過程 $\{Y(t):0<t<t_0\}$ 跟 x，y 都沒有關係，並且爲一個Gauss過程，平均值爲0，協變異函數爲

$$\Gamma(t,s)=E\{Y(t)Y(s)\}=\left\{\frac{s(t_0-t)}{t(t_0-s)}\right\}^{1/2},\qquad 0<s<t<t_0. \tag{2.134}$$

仔細觀察此協變異函數中括號｛ ｝內的表式，我們發現它是四個數（$0, s, t, t_0$）的非調和比（anharmonic ratio）。由這個事實，我們很容易推導出，Wiener過程的射影不變性，這是P. Lévy的結果，我們敍述成下面的命題。

【命題2.21】（P. Lévy）

設 $p(t)$，$0<t<t_0$，爲區間（$0, t_0$）羣射到自身的射影變換，則隨機過程 $\{Y(t):0<t<t_0\}$ 與 $\{Y(p(t)):0<t<t_0\}$ 相同。

這個重要性質在第5.4節裡會再以白噪聲的內涵來討論。

【註1】 只要適當地改變記號，這個結果對於無窮時間區間的情形亦成立。特別地，對於$(0, \infty)$的情形，我們就得到第2.1節命題2.1的結論。

【註2】 我們所討論的過程$\{Y(t): 0 < t < t_0\}$爲一個Gauss過程，具有正準表現(參見下面第4.4節)。詳細地說，存在一個Wiener過程$\{\widetilde{W}(t): 0 \leq t \leq t_0\}$使得對所有$t$，$\mathbf{B}_t(Y) = \mathbf{B}_t(\widetilde{W})$且$Y(t)$具有如下的表現：

$$Y(t) = \{t_0(t_0 - t)\}^{1/2} t^{-1/2} \int_0^t (t_0 - u)^{-1}\, d\widetilde{W}(u),$$

此地的積分是Wiener積分，見第4.2節。由上式我們很容易推導出Brown橋可滿足的隨機微分方程[參見K. Itô(1951a)，H. P. Mckean Jr.(1969)以及本書第四章的簡要複習]，如下：

$$\begin{aligned} dX(t) &= d\widetilde{W}(t) - \{(t_0 - t)^{-1} X(t) + t_0^{-1}(x - y)\}\, dt \\ X(0) &= x \text{，初期狀態} \end{aligned}$$

今回到先前引入的Brown橋$X(t) = X^{(t_0; y)}_{(0; x)}(t)$。因爲它可實現爲(2.130)，並且殆遍的樣本路徑都是連續的，故$\{X(t): t \in [0, t_0]\}$的分佈可定義在$\mathscr{C}(t_0) = \mathscr{C}([0, t_0])$上。我們仍然用$\mathfrak{B}(t_0)$表示由$\mathscr{C}(t_0)$的柱集所產生的$\sigma$環，並且$\{X(t)\}$在$(\mathscr{C}(t_0), \mathfrak{B}(t_0))$上的分佈記爲$\mu^{(t_0; y)}_{(0; x)}$。如先前，我們用$g(t; x)$表Gauss核，$\mu_x$表條件Wiener測度。

【命題2.22】

對於任意$A \in \mathfrak{B}(t_0)$，我們有

$$\int_{A(t_0)} \mu^{(t_0; y)}_{(0; x)}(A)\, g(t_0; x - y)\, dy = \mu_x(A), \tag{2.135}$$

其中$A(t_0) = \{\xi(t_0): \xi \in A\}$。

【證明】　如果我們回想$X(t)$的建構，則上述斷言的證明，至少在直觀上是顯然的。一個形式上的證明如下：顯然只需證明對於A為$\mathscr{C}(t_0)$的柱子集時，(2.135)成立就好了。因此令

$$A = \{\xi \in \mathscr{C}(t_0): \xi(s_1) \in B_1, \ldots, \xi(s_n) \in B_n, \xi(t_0) \in B_0\},$$

其中$s_1 < s_2 < \cdots < s_n < t_0$為時刻點，$B_0$，$B_1$，…，$B_n$為$\mathbf{R}$的Borel子集。然則我們有

$$\begin{aligned}\mu_x(A) &= P(W(s_1) + x \in B_1, \ldots, W(s_n) + x \in B_n, W(t_0) + x \in B_0) \\ &= \int_{(B(t_0)+x \in B_0)} P(W(s_1) + x \in B_1, \ldots, W(s_n) + x \in B_n | W(t_0))\, dP.\end{aligned}$$

注意到，$W(t_0)$的分佈之密度正好是$g(t_0; x)$，我們可以將上述之積分用分佈表示出來，這就得到(2.135)的左項之積分。　#

利用這個命題，由(2.119)所定義的$v(x)$可以表成下形：

$$\begin{aligned}v(x) &= E_x\left\{\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(W(t)) \exp\left[-\int_0^t V(W(s))\, ds\right] dt\right\} \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x\left\{f(W(t)) \exp\left[-\int_0^t V(W(s))\, ds\right]\right\} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dt \int_{C(t)} f(\xi(t)) \exp\left[-\int_0^t V(\xi(s))\right] d\mu_x(\xi) \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dt \int_{-\infty}^\infty f(y) g(t; y - x)\, dy \\ &\quad \cdot \left\{\int_{C(t)} \exp\left[-\int_0^t V(\xi(s))\, ds\right] d\mu^{(t,y)}_{(0,x)}(\xi)\right\}.\end{aligned}$$

我們的興趣集中於最後一式的括號{ }項之值。令

$$\psi(t, x, y) = \int_{C(t)} \exp\left[-\int_0^t V(\xi(s))\, ds\right] d\mu^{(t,y)}_{(0,x)}(\xi), \tag{2.136}$$

我們注意到，ψ不含前述表式之f，當V為一有界函數時，一個標準的辦

法[見M. Kac (1951)]是將(2.136)中的指數表成冪級數，因而得到$\psi(t, x, y)$的一個明白公式。對於V是無界的情形，比如說，當$|x| \to \infty$時，$V(x) \to \infty$，我們需要要求V的成長條件使得可以使用E. C. Titchmarsh (1946)發展的固有函數之展開方法。例如$V(x) = |x|^\alpha$，某$\alpha > 1$，就是一個充分條件。令$\{\lambda_n\}$與$\{\psi_n\}$分別爲微分算子$-\frac{1}{2}d^2/dx^2 + V(x)$的固有值與相應的么正化固有函數：

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\psi_n - V(x)\psi_n = -\lambda_n\psi_n.$$

然則(2.136)的ψ可以表成$\{\lambda_n\}$，$\{\psi_n\}$以及Gauss核g如下：

$$g(t; x-y)\psi(t, x, y) = \sum_n e^{-\lambda_n t}\psi_n(x)\psi_n(y), \tag{2.137}$$

[參見上述所引的M. Kac之論文，以及K. Itô與H. P. Mckean Jr. (1965)]。$V(x) = x^2$之特殊情形，可以用很不同的方法來處理，這將在第7.6節[3]展示。因而可以給$v(x)$作另外的解釋。

如果(2.137)式的左項記爲$\varphi(0, x; t, y)$，則我們可將時間區間$[0, t]$換成$[t, u]$，於是可以利用區間$[t, u]$上的Brown橋之分佈$\mu^{(x; u)}_{(t; y)}$很自然地定義出函數$\varphi(t, y; u, z)$。對於$t_0 < t_1 < t_2$，我們可以證明

$$\varphi(t_0, x; t_2, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_0, x; t_1, y)\varphi(t_1, y; t_2, z)\, dy$$

且微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x, t) - V(x)\varphi(x, t)$$

的基本解爲$\varphi(0, x_0; t, x)$。對這個領域有興趣的讀者，我們建議他去讀I. M. Gelfand與A. M. Yaglom (1960)的文章，其中對於所謂的Feynman路徑積分也有所描述。

經過上述的介紹，雖然很簡略，但我們已看出，Wiener 過程不論在分析學或量子力學都產生了許多有意義的理論。這些論題都有一些好書可參看，因此我們就不去談論它們，而立即進入下一個論題。

第三章

隨機荷佈及其分佈

我們在第1.3節，[2]，已宣佈過，這一章要來研究隨機荷佈的分佈。在有限維空間的情形，Bochner定理告訴我們，機率分佈及其Fourier特徵之間形成對射的局面。這個結果在本章中也有平行的類推，那就是Bochner-Minlos定理（第3.2節），它將荷佈空間上的機率測度與試驗函數空間上的Fourier特徵泛函關連起來。本章的第二個目的是，從各種不同的角度（第3.3，3.4節）來探討白噪聲這個隨機荷佈，以作為下一章的討論基礎。

3.1 Fourier特徵泛函

當我們要探討一個隨機荷佈的分佈時，心存 Wiener 過程的時間導微 $(d/dt)W(t,\omega)$ 這個典型例子是非常有用的，隨機荷佈的機率分佈是某個荷佈空間上的一個機率測度，並且嚴格說來。對於每一個隨機荷佈都對應有一個荷佈空間。然而，一般時候，我們可假設時軸為某區間T（有窮區間或無窮區間；有時也取為圓），並且我們這樣利用Hilbert 空間 $H=L^2(T)$：取E為一個可列Hilbert核式空間（見第A.3節）使得

$$E\subseteq H\subseteq E^*, \tag{3.1}$$

並且嵌寢映射皆為連續的。E的偶伴空間E^*就是隨機荷佈的分佈所在之底基空間。

在敍述Bochner-Minlos定理之前，我們必須先作一些預備工作。我們用記號

$$\langle x,\xi\rangle,\qquad x\in E^*,\ \xi\in E. \tag{3.2}$$

表示連結E與E^*的自然配對。特別地，若$x\in H$，則$\langle x,\xi\rangle$與H中的內積一致。

今複習隨機荷佈的定義。所謂隨機荷佈是指一族定義在機率空間(Ω,B,P)上的隨機變數:

$$\{X(\xi,\omega):\xi\in E\},$$

以E爲參數空間,並且$X(\xi,\omega)$對ξ是連續的且線性的。($X(\xi_1)$,$X(\xi_2)$,…,$X(\xi_n)$)的聯合分佈由Fourier特徵函數

$$\int \exp\left[i\sum_j z_j X(\xi_j,\omega)\right] dP(\omega), \qquad z_j\in \mathbf{R},$$

所唯一決定。由於X對ξ是線性的,故上式正好是$X(\Sigma_j z_j\xi_j)$的Fourier特徵函數。又因爲$\Sigma_j z_j\xi_j\in E$,故隨機荷佈的分佈完全由

$$C_X(\xi)=\int \exp[iX(\xi,\omega)]\,dP(\omega). \tag{3.3}$$

所決定。泛函$C_X(\xi)$,$\xi\in E$,稱爲隨機荷佈X的Fourier特徵泛函,它滿足下列性質:

1. C_X對$\xi\in E$是連續的。
2. C_X是正定的,亦即對任意n,複數α_1,α_2,…,α_n及ξ_1,ξ_2,…,$\xi_n\in E$,我們有

$$\sum_{j,k}\alpha_j\bar{\alpha}_k C_X(\xi_j-\xi_k)\geq 0; \tag{3.4}$$

3. $C_X(0)=1$。

這些條件跟有限維空間的情形,在形式上是相同的。(參見第一章第1.3節)根據第1.3節,[1],我們考慮這樣的問題:尋求一個機率測度μ使得

$$C_X(\xi)=\int_{E'} e^{i\langle x,\xi\rangle}\,d\mu(x), \tag{3.5}$$

其中C_X爲給定的滿足(3.4)式之泛函。

正如我們已指出的（第 1.3 節，[3]），無窮維空間上的測度跟有限維空間的情形，有點兒差異，例如Bochner定理所建立起來的有關機率分佈及其Fourier 特徵之間的對應，在無窮維空間的情形必須加以修飾且更小心地加以研究。我們分成許多步驟來討論這個問題。首先用一個例子來說明困難的所在：在 $\mathbf{R}^n$ 空間上的一個連續的正定函數決定了 $\mathbf{R}^n$ 上的一個機率測度，這在Hilbert 空間的情形就不成立了。

【例 1】

取 $E = H = L^2(\mathbf{R})$（故 E^* 亦等於 H）。再取

$$C(\xi) = \exp\left[-\frac{1}{2}\|\xi\|^2\right], \qquad \xi \in E, \tag{3.6}$$

其中 $\|\cdot\|$ 爲 H 中的範數，則容易驗證 $C(\xi)$ 滿足（3.4）式之條件。今假設在 H 上可以定義一個機率測度 μ 使得（3.5）式成立，則對 H 中的任意完備的么正基底 $\{\xi_n\}$ 而言，由（3.6）可知

$$\int_H e^{iz\langle x,\, \xi_n\rangle}\, d\mu(x) = e^{-z^2/2}, \qquad z \in \mathbf{R}. \tag{3.7}$$

另一方面，對任意 $x \in H$，我們有

$$\lim_{n\to\infty} \langle x, \xi_n\rangle = 0.$$

但是這跟（3.7）之等式抵觸，因此得到矛盾。

由（3.7）式知，$\langle x, \xi_n\rangle$ 爲一個標準的Gauss 隨機變數，再加上

$$C\left(\sum_1^n z_k \xi_k\right) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_1^n z_k^2\right], \qquad z_k \in \mathbf{R},$$

的關係式得知 $\{\langle x, \xi_n\rangle : n \geq 1\}$ 爲一族獨立的隨機變數。由大數法則得知

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_1^N \langle x, \xi_n\rangle^2 = 1 \quad 殆遍\ (\mu).$$

今因 $\{<x, \xi_n>\}$ 爲 x 的坐標，故粗略地說，我們看出 μ 的擔台 (support) 要比 H 還大，這就是上述矛盾的緣由。

由 (3.6) 之特徵泛函所決定的機率測度是爲白噪聲 (white noise) 。這是以後 (第 3.3 節) 要引入的重要概念，事實上它是本章的主題。

3-2 Bochner-Minlos 定理

這一節我們要討論這樣的問題：給一個特徵泛函 $C(\xi)$，$\xi \in E$，滿足 (3.4) 式，如何在空間 E^* 上建構機率測度 (機率分佈) μ。我們分幾個步驟來進行。首先我們描述 μ 的定義所在之可測空間 (E^*，$\mathbf{B}$) 。E^* 的子集中，由有限多個試驗函數所決定者是當然的考慮對象。因此形如

$$A_{\xi_1, \ldots, \xi_n, B} = \{x \in E^*: (\langle x, \xi_1\rangle, \ldots \langle x, \xi_n\rangle) \in B\} \tag{3.8}$$

的集合，其中 $n \geq 1$，$\xi_1, \cdots, \xi_n \in E$ 且 B 爲 $\mathbf{R}^n$ 的 Borel 子集，必須屬於 μ 的定義域——σ 環 (σ-algebra) $\mathfrak{B}$。E^* 的子集，形如 (3.8) 式者，稱爲一個柱集 (cylinder set) 。如果在 (3.8) 式中的 ξ_i 皆從 E 的有限維子空間 F 中取出，則稱此柱集建基於 F 上。所有建基於 F 上的柱集形成一個 σ 環，記爲 $\mathfrak{A}_F$。對所有有限維空間作併聯得到

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{F \subset E} \mathfrak{A}_F$$

但這只是 E^* 的子集所形成的一個環 (algebra) 而不是 σ-環！因此我們取 $\mathfrak{B}$ 爲由 $\mathfrak{A}$ 所生成的 σ 環，來作爲我們的可測空間 (E^*，$\mathfrak{B}$) 。

今我們來定義由一個隨機荷佈的 Fourier 特徵泛函所決定的機率測度。由給定的 $C(\xi)$，我們按下列三個步驟來做

1. 對每一個固定的有限維空間 $F \subset E$，建構一個測度空間 (E^*，$\mathfrak{A}_F$，m_F) ；然後
2. 讓 F 變動，得到一族測度空間，從而決定了一個有窮加性的測度空間 (E^*，$\mathfrak{A}$，m) ；最後
3. 將 (E^*，$\mathfrak{A}$，m) 延拓成一個可列加性之測度空間 (E^*，$\mathfrak{B}$，μ) 。

其中要以最後一步較困難，這是無限維空間所特有的。上述三個步驟的詳細作法如下：

(a) 取F爲E的有限維子空間，且固定下來。F的謀殺子（annihilator）F^a是指E^*的子集定義爲

$$F^a = \{x \in E^* : \langle x, \xi \rangle = 0 \quad \forall \quad \xi \in F\},$$

於是商空間E^*/F^a同構於F^*（$\cong F$）並且是n維的。連結E^*/F^a與F的雙線性形式$\langle \cdot, \cdot \rangle_F$定義如下：若$x$爲$\bar{x} \in E^*/F^a$的一個代表，則令

$$\langle \bar{x}, \xi \rangle_F = \langle x, \xi \rangle, \qquad \xi \in F.$$

事實上，右式與代表x的取法無關，並且$\langle \cdot, \cdot \rangle_F$可看作是$n$維歐氏空間的內積。

另一方面，將$C(\xi)$局限到F上，記爲$C_F(\xi)$。由（3.4）式知，$C_F(\xi)$可看作是$\mathbf{R}^n$上的一個Fourier特徵函數，故由Bochner定理（定理1.1）知，在F^*上，即在E^*/F^a上存在有唯一的機率測度m_F，使得

$$C_F(\xi) = \int_{E^*/F^a} e^{i\langle \bar{x}, \xi \rangle}\, dm_F(\bar{x}).$$

因此，我們得到一個機率空間（E^*/F^a，$\mathfrak{B}_F$，m_F），其中$\mathfrak{B}_F$表由E^*/F^a的子集所成的Borel體。

(b) 令ρ_F爲從E^*到E^*/F^a的自然射影，亦即

$$\rho_F : x \to \bar{x} = x + F^a \in E^*/F^a, \qquad x \in E^*.$$

於是我們有

$$\rho_F^{-1}(\mathfrak{B}_F) = \mathfrak{A}_F.$$

如果$B \in \mathfrak{B}_F$，則$A \equiv \rho_F^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_F$，於是可定義$\tilde{m}_F$爲

$$\tilde{m}_F(A) = m_F(B),$$

而得到一個測度空間（E^*，$\mathfrak{A}_F$，$\widetilde{m}_F$）。

今假設F與G爲E的兩個有限維子空間且$F\subset G$，則自然射影

$$T: E^*/G^* \to E^*/F^*$$

有意義，並且對$B\in\mathfrak{B}_F$我們有

$$m_F(B) = m_G(T^{-1}B).$$

事實上，此等式可由Bochner定理推得，因爲$C_G(\xi)$局限到F上與$C_F(\xi)$是一致的。因此機率空間（E^*，$\mathfrak{A}_G$，$\widetilde{m}_G$）爲（E^*，$\mathfrak{A}_F$，m_F）的延拓。

今在$\mathfrak{A}$上定義m。因爲對任意$A\in\mathfrak{A}$，存在一個適當的有限維子空間$F\subset E$使得$A\in\mathfrak{A}_F$，於是定義$m(A)$爲

$$m(A) = \tilde{m}_F(A). \tag{3.9}$$

由上述知，m是有定義的，今我們證明m具有有限加性。

令A_1，A_2，…，A_n爲$\mathfrak{A}$中的互斥事件，且各建基於子空間F_1，F_2，…，F_n上。假設這些子空間張成子空間F，顯然F亦爲E的有限維子空間，$A_i\in\mathfrak{A}_F$，且

$$\tilde{m}_{F_i}(A_i) = \tilde{m}_F(A_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

因爲$\widetilde{m}_F$在$\mathfrak{A}_F$上具有加性，且$\cup_1^n A_i\in\mathfrak{A}_F$，故有

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_1^n A_i\right) &= \tilde{m}_F\left(\bigcup_1^n A_i\right) = \sum_1^n \tilde{m}_F(A_i) \\ &= \sum_1^n \tilde{m}_{F_i}(A_i) = \sum_1^n m(A_i). \end{aligned}$$

至此我們已經證明了：（E^*，$\mathfrak{A}$，m）爲一個有窮加性機率空間，即擬機率空間（參見第1.2節例4）。

(c) 最後我們要將m延拓到（E^*，$\mathfrak{B}$）上。如所週知可以作這種延拓的充要條件是m在$\mathfrak{A}$上是σ可列加的（第2.1節補題2.1），並且在本章開頭（3.1）的假設下，只要$C(\xi)$滿足（3.4）之(1)，(2)，(3)，就可推得

m 在 $\mathfrak{A}$ 上是 σ 可列加的。下面的補題〔R.A. Minlos（1959）〕是要證明這個結果的關鍵。

【補題 3.1】

設 μ 為 $\mathbf{R}^n$ 上的一個機率測度，令 $\mathscr{E}$ 表橢球

$$\left\{z=(z_1, z_2, \ldots, z_n): \sum_1^n a_i^2 z_i^2 \leq \gamma^2\right\}.$$

若 μ 的 Fourier 特徵函數 $\varphi(z)$，$z\in\mathbf{R}^n$，滿足

$$|\varphi(z)-1|<\varepsilon \quad 其中\ z\in\mathscr{E}, \tag{3.10}$$

則對 $\mathbf{R}^n$ 中的任意半徑為 t 之球 $S(t)$，下面的不等式成立：

$$\mu(S(t)^c)<\beta^2\left(\varepsilon+\frac{2}{\gamma^2 t^2}\sum_1^n a_i^2\right) \tag{3.11}$$

其中 $S(t)^c=\mathbf{R}^n\setminus S(t)$ 且 β 為一個跟 n 與 t 無關的正的常數。

【證明】 先對下面積分作簡單的估計：

$$\begin{aligned}
I &\equiv \int_{\mathbf{R}^n}\left[1-\exp\left(-\frac{1}{2t^2}\sum_1^n x_i^2\right)\right] d\mu(x)\\
&\geq \int_{S(t)^c}\left[1-\exp\left(-\frac{1}{2t^2}\sum_1^n x_i^2\right)\right] d\mu(x)\\
&\geq [1-\exp(-\tfrac{1}{2})]\mu(S(t)^c).
\end{aligned}$$

今積分 I 可表成

$$I=1-\int_{\mathbf{R}^n}\exp\left(-\frac{1}{2t^2}\sum_1^n x_i^2\right) d\mu(x)$$

且被積分項 $\exp(-(1/2t^2)\Sigma_1^n x_i^2)$ 可視為一個 Gauss 分佈的 Fourier 特徵函數。因此我們有

$$
\begin{aligned}
I &= 1-(t^2/2\pi)^{n/2}\int_{R^n}\varphi(z)\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sum_1^n z_i^2\right)dz \\
&= \left(\frac{t^2}{2\pi}\right)^{n/2}\int_{R^n}[1-\varphi(z)]\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sum_1^n z_i^2\right)dz \\
&\le \left(\frac{t^2}{2\pi}\right)^{n/2}\left|\int_{\mathscr{E}}+\int_{\mathscr{E}^c}\right| \\
&< \varepsilon+\left(\frac{t^2}{2\pi}\right)^{n/2}\frac{2}{\gamma^2}\int_{\mathscr{E}^c}\left(\sum_1^n a_i^2z_i^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sum_1^n z_i^2\right)dz \\
&< \varepsilon+\frac{2}{\gamma^2t^2}\sum_1^n a_i^2.
\end{aligned}
$$

由上述的估計得到

$$
\mu(S(t)^c)<\left[1-\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\left(\varepsilon+\frac{2}{\gamma^2t^2}\sum_1^n a_i^2\right).
$$

#

下面的補題進一步給出 E^* 上的測度可延拓的條件。今後我們要採用如下的記號：$\|\cdot\|_p$ 表 E 的第 p 個範數，E_p 表相應的Hilbert空間，參見第A.3節。

【補題 3.2】

一個有窮加性測度 m 可以延拓成（E^*，$\mathfrak{B}$）上的 σ 可列加性測度的充要條件是：對任意 $\varepsilon>0$，存在一個自然數 n 與一個球 $S_n=\{x\in E^*:\|x\|_{-n}\le\gamma_n\}$，使得對任意 $A\in\mathfrak{A}$，A 與 S_n 互斥，我們有

$$
\mu(A)<\varepsilon
$$

【證明】 必要性，⇒）：假設 m 可延拓成 μ，取一列球 S_n 具有遞增半徑 $\gamma_n\uparrow\infty$，於是 $\cup_n S_n=E^*$，因爲 μ 具有可列加性，故對足夠大的 n，

$$
\mu(S_n^c)<\varepsilon
$$

由此可得到有關 $\mu(A)$ 的不等式。

充分性，⇐）：利用歸謬法來證明。假設 $\{A_n\}$ 爲 $\mathfrak{A}$ 中互斥的一列事件，使得 $\Sigma_n A_n=E^*$。因爲 m 具有有窮可加性，故 $m(\Sigma_1^n A_k)=$

$\Sigma_1^n m(A_k) \leq 1$ 從而

$$\sum_1^\infty m(A_n) \leq 1.$$

今若 $\Sigma_1^\infty m(A_n) < 1$，則存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$\sum_1^\infty m(A_n) = 1 - 3\varepsilon < 1.$$

對每個 A_n，我們可以找到一個開柱集 A_n' [亦即 (3.8) 中 B 爲開集] 使得 $A_n' \supset A_n$ 且

$$m(A_n' \backslash A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

顯然 $\cup_j A_j' \supseteq S_n$，因爲 S_n 爲弱緊，故可取到有限多個元素，記爲 A_1'，A_2'，…，A_k'，遮住 S_n，令 $A' = \cup_1^k A_j'$，則 $A' \in \mathfrak{A}$，且

$$1 = m(A' + A'^c) = m(A') + m(A'^c),$$

$$m(A') \leq \sum_1^k m(A_j') + \varepsilon,$$

$$m(A'^c) < \varepsilon.$$

最後一個不等式是由補題的假設得到的。將三個不等式合起來，就得到矛盾：

$$1 \leq \sum_1^k m(A_j) + \varepsilon + \varepsilon \leq (1 - 3\varepsilon) + 2\varepsilon = 1 - \varepsilon.$$

#

【定理 3.1】

令 $C(\xi)$，$\xi \in E$，爲一個泛函，滿足：

1. 對 $\|\cdot\|_p$ 是連續的，某 p
2. 正定的；且
3. $C(0) = 1$；

亦即$C(\xi)$爲一個特徵泛函。

如果存在某$n\ (>p)$使得嵌射T_p^n：$E_n\to E_p$爲Hilbert-Schmidt型，則m存在有唯一的可列加延拓μ，於$(E^*, \mathfrak{B})$上，且μ的擔台爲E_n^*。

【證明】　由假設知，對任意$\varepsilon>0$，在E_p中存在一個半徑爲r的球U（原點0的近旁），使得

$$|C(\xi)-1|<\frac{\varepsilon}{2\beta^2},\qquad \xi\in U,$$

其中β爲補題3.1中所述者。復次，由假設亦可得知，對$0\in E_n$，存在有近旁V使得

$$T_p^n V\subseteq U.$$

於是我們可以證明E_n^*中半徑爲$t=2\beta\|T_p^n\|_2/(\gamma^2\varepsilon)^{1/2}$的球$S_n$，正好可作爲補題3.2中的球。事實上，令$A$爲建基在有限維空間$F$上的柱集，且$A$與$S_n$互斥，則存在一個$n$維Borel集$B$使得$A=\rho_F^{-1}(B)$且

$$B\cap\rho_F(S_n)=\varnothing.$$

今引渡到有限維測度，我們首先注意到，因爲在範數$\|\cdot\|_n$之下，$V\cap F$爲一個有限維橢球，故可利用卡氏坐標表成$\Sigma_i a_i^2 z_i^2\leq\gamma^2$之形。我們也注意到$\Sigma_i a_i^2\leq\|T_p^n\|_2^2$。於是利用補題3.1得到

$$\begin{aligned}m_F(\rho_F(S_n)^c)&<\beta^2\left(\frac{\varepsilon}{2\beta^2}+\frac{2}{\gamma^2t^2}\sum_1^k a_i^2\right)\\&<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{2\beta^2}{\gamma^2t^2}\|T_p^n\|_2^2=\varepsilon.\end{aligned}$$

這就保證了m之可延拓性。

至於唯一性的證明，和通常測度論所處理的有限（事實上是機率）測度的情形完全一樣。 #

將定理3.1稍作修飾，就可得到下面定理：

【定理 3.2】

設 $C(\xi)$ 爲 E 上的特徵泛函，亦即滿足（3.4）之(1)，(2)，(3)的泛函；則在（E^*，$\mathfrak{B}$）上存在唯一的機率測度 μ 使得

$$C(\xi)=\int_{E^*}e^{i\langle x,\xi\rangle}\,d\mu(x). \tag{3.12}$$

【定義 3.1】

設 $C(\xi)$ 爲隨機荷佈 $\{X(\xi):\ \xi\in E\}$ 的 Fourier 特徵泛函，則由定理 3.2 所定出的在（E^*，$\mathfrak{B}$）上的測度 μ 稱爲 $\{X(\xi)\}$ 的**分佈**，而泛函 $C(\xi)$ 有時也稱爲此分佈的 Fourier **特徵泛函**。

至此我們已建立起 E 上的特徵泛函與 E^* 上的分佈之間的對射，於是可以進一步來討論分佈的收斂問題，如第 1.3 節 [1] 之 Lévy 收斂定理。然而我們不去做這些工作，轉而考慮隨機荷佈及其分佈的例子。

3·3 隨機荷佈及其分佈的例子

【例 1】

第一個例子是典型的隨機荷佈。此地我們取核式空間爲 $\mathscr{S}$（也可取爲 D_0）並且特徵泛函給如

$$C_{\sigma^2}(\xi)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\|\xi\|^2\right),\qquad \xi\in\mathscr{S}. \tag{3.13}$$

利用定理 3.2，立知（$\mathscr{S}^*$，$\mathfrak{B}$）上的機率分佈 μ_σ 存在且唯一。

【定義 3.2】

由 $C_{\sigma^2}(\xi)$ 所決定的機率空間（$\mathscr{S}^*$，$\mathfrak{B}$，μ_σ）稱爲具有方差 σ^2 的白噪聲。

令 $\mathscr{S}_n$ 表示將 $\mathscr{S}$ 對第 n 個範數 $\|\cdot\|_n$ 作完備化得到的 Hilbert 空間，參見附錄中的第 A.3 例 4。由（3.13）所給定的泛函 C_{σ^2} 在 $L^2(\mathbf{R})$ 上是連續的，且如第 A.3 節所述，嵌襯映射

$$\mathscr{S}_1\to L^2(\mathbf{R})$$

爲Hilbert-Schmidt算子。因此由定理3.1可知，μ_σ的擔台爲$\mathscr{S}_1^*$，亦即

$$\mu_\sigma(\mathscr{S}_1^*) = 1$$

現在我們來研究$(\mathscr{S}^*, \mathfrak{B}, \mu_\sigma)$的岸界分佈（marginal distribution），亦即μ_σ局限到$\mathscr{S}^*$的子空間的情形。爲了方便起見，以下我們都假設$\sigma^2 = 1$，並且分別簡記$C_1(\xi)$與μ_1爲$C(\xi)$與μ。令F爲$\mathscr{S}$的有限維子空間，再令ρ_F表從$\mathscr{S}^*$到$\mathscr{S}^*/F^a$的自然射影，如上節所述。然則$\rho_F \circ \mu$只不過是第3.2節所引進的m_F，並且$C(\xi)$之局限到F可視爲m_F的Fourier特徵泛函。對F引進卡氏坐標，我們就得到下面的表式

$$C(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_1^n z_j^2\right), \qquad \xi = \sum_1^n z_j \xi_j, \qquad n = \dim F.$$

因此m_F爲n維Gauss分佈，在旋轉之下不變（亦即m_F爲$SO(n)$不變測度）。坐標$\langle x, \xi_1 \rangle$，$\langle x, \xi_2 \rangle$，…，$\langle x, \xi_n \rangle$可看作是定義在$(\mathscr{S}^*, \mathfrak{B}, \mu)$上的隨機變數，具有標準Gauss分佈且互相獨立。它們的聯合分佈決定了相應於F的岸界分佈。

我們有興趣的另一情形是，當F的餘維（codimension）爲有限時，μ的岸界分佈。此時F爲一個核式空間，因爲我們可以取到$L^2(\mathbf{R})$的一個適當的子Hilbert空間H'，具有有限餘維，以及$\mathscr{S}^*$的一個子空間$F^* \cong \mathscr{S}^*/F^a$，而得到

$$F \subset H' \subset F^*.$$

於是我們可仿照第3.1節來進行討論。F^*上的機率測度μ_F可以這樣得到：將$C(\xi)$局限到F上，記爲$C_F(\xi)$，由$C_F(\xi)$作出μ_F。這樣定義的μ_F也是μ的岸界分佈，並且機率空間(F^*, μ_F)當然同構於$(\mathscr{S}^*, \mu)$。

【例1'】

取Wiener過程的二階導微$W''(t)$，$-\infty < t < \infty$，這是在荷佈意味下的導微。隨機荷佈$\{W''(t)\}$的Fourier特徵泛函爲

$$C'(\xi)=\exp\left(-\frac{1}{2}\|\xi'\|^2\right),\qquad \xi\in\mathscr{S},\qquad \|\cdot\| \text{ 為 } L^2(\mathbf{R})\text{-範數}.$$

按第A.3節中所用的記號，我們可以斷言，由$C'(\xi)$所決定的測度μ'，其擔台為$\mathscr{S}_2^*$（參見定理 3.1）。因此對殆遍的樣本路徑皆可視為屬於$\mathscr{S}_2^*$的荷佈。事實上，$\{W''(t)\}$為一個隨機荷佈。

在例 1 中的測度μ'及μ皆為定義在相同空間（$\mathscr{S}^*$，$\mathfrak{B}$）上的機率測度，且互為奇異（mutually singular）。以後我們將證明這件事。令$\xi_n(u)$給如下：

$$\xi_n(u)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2}H_n(u)\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right),\qquad n\ge 0.$$

則$\{\xi_n: n\ge 0\}$形成$L^2(\mathbf{R})$中的完備么正基底。從而在（$\mathscr{S}^*$，$\mathfrak{B}$，μ）上，

$$\{\langle x,\xi_{3n}\rangle: n\ge 1\} \tag{3.14}$$

形成一列獨立隨機變數，皆具有標準Gauss分佈。進一步由公式

$$\xi_n'(u)=\left(\frac{1}{2}n\right)^{1/2}\xi_{n-1}(u)-\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)^{1/2}\xi_{n+1}(u)$$

〔見第A.5節之（A.26）〕得知，$\langle x,\xi_{3n}\rangle$為定義在（$\mathscr{S}^*$，$\mathfrak{B}$，$\mu'$）上的Gauss隨機變數，具有平均值 0 與方差$\|\xi_{3n}'\|^2=3n+\frac{1}{2}$。復次，由$C'(\xi)$的表式可證明（3.14）在（$\mathscr{S}^*$，$\mathfrak{B}$，$\mu'$）形成一列獨立隨機變數。今考慮獨立隨機變數所成的級數

$$\sum_1^\infty n^{-1}\langle x,\xi_{3n}\rangle. \tag{3.15}$$

此級數在μ之下，對殆遍x收斂，但是在μ'之下，對殆遍x發散，因為在後一種情形，第n項的方差的階為n^{-1}。令K表示使級數（3.15）收斂的所有x所成的集合，則[illegible]，$\mu(K)=1$且$\mu'(K)=0$，亦即μ與μ'互為奇異。

【例 2】

令$E=\mathscr{D}(\pi)$（參見第A.3節之記號），取形如例 1 中的特徵泛函：

$$C(\xi)=\exp\left(-\frac{1}{2}\|\xi\|^2\right),\qquad \xi\in\mathscr{D}(\pi).$$

則在空間$\mathscr{D}(\pi)^*$上存在唯一的機率測度$\bar{\mu}$。令$\mathfrak{B}(\pi)$表由$\mathscr{D}(\pi)^*$中的所有柱集所生成的σ環，則機率空間（$\mathscr{D}(\pi)^*$，$\mathfrak{B}(\pi)$，$\bar{\mu}$）亦稱爲**白噪聲**，具有時間區間$[0, 2\pi]$。

我們可以再引進一個白噪聲如下：取基本的核式空間爲$\hat{\mathscr{D}}(\pi)$，即具有2π週期的C^∞函數所成的空間（這個空間可看作是定義在單位圓上的所有C^∞函數所構成的。）我們再取特徵泛函如（3.13）式，但$\sigma=1$。於是如例 1 所述，我們得到一個機率測度$\hat{\mu}$。$\hat{\mu}$可視爲$\bar{\mu}$的岸界分佈。從而可定義σ環$\hat{\mathfrak{B}}(\pi)$，而得到機率空間（$\hat{\mathscr{D}}(\pi)$，$\hat{\mathfrak{B}}(\pi)$，$\hat{\mu}$），稱爲**週期的白噪聲**（periodic white noise）。

【例 3】

本例我們取隨機荷佈的Fourier特徵泛函具有更一般的形式：

$$C(\xi)=\exp\left[im(\xi)-\frac{1}{2}K(\xi,\xi)\right],\qquad \xi\in E,\tag{3.16}$$

其中m爲E上的連續泛函，$K(\xi,\eta)$爲定義在$E\times E$上的連續且正定的雙線性形式。這種情形的隨機荷佈，稱爲Gauss型隨機荷佈，m稱爲平均值泛函，K稱爲協變變異泛函。容易看出，直至目前爲止所討論的例子都是Gauss型隨機荷佈。

我們不去細究Gauss型隨機荷佈的一般理論，而只討論具有特徵泛函（3.16）之隨機荷佈的一個基本事實。那就是，此泛函決定了一個機率空間（E^*，$\mathfrak{B}$，μ），在其上存在有Gauss型系統$\{\langle x,\xi\rangle:\xi\in E\}$，具有平均值$m(\xi)$與協變異

$$\int[\langle x,\xi\rangle-m(\xi)][\langle x,\eta\rangle-m(\eta)]\,d\mu(x)=K(\xi,\eta).$$

首先我們證明 $\{\langle x, \xi\rangle : \xi \in E\}$ 爲Gauss型系統。對任意有限多個 $\langle x, \xi\rangle$ 的線性組合

$$\sum_j a_j\langle x, \xi_j\rangle, \qquad a_j \in \mathbf{R}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

是定義在 $(E^*, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的隨機變數並且具有特徵泛函

$$\begin{aligned}\int \exp\left[it \sum_j a_j\langle x, \xi_j\rangle\right] d\mu(x) &= \int \exp\left[i\left\langle x, \sum_j ta_j\xi_j\right\rangle\right] d\mu(x)\\ &= \exp\left[im\left(\sum_j ta_j\xi_j\right) - \frac{1}{2}K\left(\sum_j ta_j\xi_j, \sum_j ta_j\xi_j\right)\right]\\ &= \exp\left[itm\left(\sum_j a_j\xi_j\right) - \frac{1}{2}t^2K\left(\sum_j a_j\xi_j, \sum_j a_j\xi_j\right)\right].\end{aligned}$$

這就證明了 $\Sigma_j a_j\langle x, \xi_j\rangle$ 爲Gauss型隨機變數，具有平均值 $m(\Sigma_j a_j \xi_j)$ 與變異數 $K(\Sigma_j a_j\xi_j, \Sigma_j a_j \xi_j)$。在上述中取 $t = 1$，視 a_j 爲變數，且因爲 $m(\Sigma_j a_j\xi_j) = \Sigma_j a_j b(\xi_j)$，我們得知 $\langle x, \xi_j\rangle$ 的平均值爲 $m(\xi_j)$；又因爲 $K(\Sigma_j a_j\xi_j, \Sigma_j a_j\xi_j) = \Sigma_{j,k} a_j a_k K(\xi_j, \xi_k)$，故 $\langle x, \xi_j\rangle$ 與 $\langle x, \xi_k\rangle$ 的協變異數爲 $K(\xi_j, \xi_k)$。由於這個緣故，由(3.16)之特徵泛函 $C(\xi)$ 所決定的機率測度 μ 稱爲一個Gauss測度。

Wiener過程 $\{W(t) : t \geq 0\}$ 的分佈(Wiener測度)可以給成 E^* 上的機率測度，具有Fourier特徵泛函

$$\begin{aligned}&C(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\infty |\hat{\xi}(t)|^2\, dt\right), \qquad \xi \in E\ [\subseteq L^2([0, \infty))],\\ &\hat{\xi}(t) = \int_t^\infty \xi(u)\, du, \qquad t \geq 0.\end{aligned} \tag{3.17}$$

事實上隨機變數

$$\int_0^\infty W(t)\xi(t)\, dt, \qquad \xi \in E$$

爲Gauss型，具有平均值0與變異數

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (t \wedge s)\xi(t)\xi(s)\, dt\, ds = \int_0^\infty |\hat{\xi}(t)|^2\, dt.$$

這些觀察使我們可以將 $\{W(t)\}$ 看作是具有特徵泛函（3.17）之隨機荷佈。

【例4】

取核式空間 E 爲（0，∞）上的 $\mathscr{C}^\infty$ 函數全體，則 E 稠於 $L^2([0,\infty))$。對於 $1 < \alpha < 2$，

$$C_\alpha(\xi) = \exp\left[-\int_0^\infty |\xi(t)|^\alpha\, dt\right], \qquad \xi \in E, \tag{3.18}$$

爲一個特徵泛函，它定義出一個機率空間（E^*，$\mathfrak{B}$，$\mu^{(\alpha)}$）。測度 $\mu^{(\alpha)}$ 是 $\{X_\alpha(t): t > 0\}$ 的導出過程 $\{X'_\alpha(t): t > 0\}$ 之分佈，其中 $\{X_\alpha(t): t > 0\}$ 爲一個對稱的穩定過程，具有特徵指數 α。

對於一般情形，我們可以取

$$C(\xi) = \exp\left\{\int_0^\infty dt \int [e^{i\xi(t)u} - 1 - i\xi(t)u]\, d\mathfrak{N}(u)\right\} \tag{3.19}$$

其中 $d\mathfrak{N}(u)$ 爲一個 Lévy 測度滿足

$$\int \frac{u^2}{1+u^2}\, d\mathfrak{N}(u) < \infty.$$

由（3.19）所給的泛函 $C(\xi)$ 是一個特徵泛函，它決定了 E^* 上的一個機測度，這個測度爲某個 Lévy 過程的導出過程之分佈。特別地，若對某常數 $C_\alpha > 0$，Lévy 測度 $d\nu(u) = C_\alpha |u|^{-(\alpha+1)} du$，則（3.19）的 $C(\xi)$ 跟（3.18）的 $C_\alpha(\xi)$ 一致。

例1及例1′中的白噪聲之特徵泛函與（3.19）還具有一個重要性質：

$$C(\xi_1 + \xi_2) = C(\xi_1) \times C(\xi_2), \quad 當 \quad \xi_1(t)\xi_2(t) \equiv 0. \ 時 \tag{3.20}$$

【定義 3.3】

一個隨機荷佈的特徵泛函若滿足（3.20）之函數方程則稱此隨機荷佈在每一時刻具有獨立值。

這個定義的道理建基在下面的事實上：由（3.20）可得

$$\text{若 } \xi_1(t)\xi_2(t)\equiv 0,\quad \text{則} \quad \langle x,\xi_1\rangle \quad \text{與} \quad \langle x,\xi_2\rangle \text{ 是獨立的。} \tag{3.21}$$

這在由 $C(\xi)$ 所決定的機率空間上是對的。這最後的斷言是Kac 定理的結論，Kac 定理是說：特徵函數的分解蘊含和是由獨立隨機變數加起來的。

在每一時刻具有獨立值的隨機荷佈，是獨立隨機變數序列的連續類推。白噪聲是這種隨機荷佈的一個例子。這種隨機荷佈顯示出最基本形式的相依性，因此在預測理論及訊息的數學理論中常以“修正”的姿態出現。對一個給定的隨機過程要做出其修正過程（innovation process），以及要將一個過程表成其修正過程〔參見 P. Lévy（1937），第 39，64節，N. Wiener（1958）〕，這些問題在隨機過程論的研究上扮演一個非常重要的角色。下一章的內容就是沿着這些線索而發展的。

3·4 白噪聲

回想一下，E 上的特徵泛函 $C(\xi)=\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2\|\xi\|^2)$ 在 E^* 上決定了一個機率測度 μ_σ，這是一個Gauss測度，我們稱機率空間（E^*，$\mathfrak{B}$，μ_σ）爲一個具有變異數 σ^2 之白噪聲（參見上節之例 1）。以下我們只稱測度 $\mu_1=\mu$（即取 $\sigma^2=1$）爲白噪聲，在這種情形下，當 $\|\xi\|=1$ 時，$<x,\xi>$ 爲一個標準Gauss測度。在我們的討論中，基本的核式空間 E 可取爲 $\mathscr{S}$，$\mathscr{D}$ 或 D_0，但是只有當時間區間不是整個實數軸 $\mathbf{R}$ 時，我們才加以註明。

今回到本節開頭所給的特徵泛函，視 $\sigma>0$ 爲一個參數。換句話說，我們考慮 E^* 上的一族機率測度 $\{\mu_\sigma:\sigma>0\}$。

【命題 3.1】

具有不同的變異數之兩測度 μ_{σ_1} 與 μ_{σ_2}，（$\sigma_1\neq\sigma_2$）互相奇異。

【證明】 首先我們注意到，若 ξ 與 η 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中互相直交，則 $<x,\xi>$ 與 $<x,\eta>$ 爲定義在機率空間（E^*，$\mathfrak{B}$，μ_σ）上的兩個獨立隨機變數，

。在 μ_σ 之下，第 3.3 節例 3 中的雙線性泛函 $S(\xi,\eta)$ 相應於 $(\xi,\eta)\sigma^2$，其中 $(\cdot,\cdot)$ 爲 $L^2(\mathbf{R})$ 中的內積構造。

令 $\{\xi_n\}\subset E$ 爲 $L^2(\mathbf{R})$ 中的完備么正基底，則 $\{<x,\xi_n>\}$ 不論是相對於 μ_{σ_1} 或 μ_{σ_2}，都是獨立的Gauss 型隨機變數所成的序列，且每個隨機變數的平均值爲 0 。$<x,\xi_n>$ 相對於 $\mu_{\sigma i}$ 的變異數是 σ_i^2，$i=1$，2，故由強大數法則得知

$$\lim_{n\to\infty} N^{-1}\sum_1^N \langle x,\xi_n\rangle^2=\sigma_i^2,\quad \mu_{\sigma_i}\text{一殆遍},\quad i=1,2. \tag{3.22}$$

今考慮事件 $A(\sigma_1)=\{x:\lim_N N^{-1}\Sigma_1^N<x,\xi_n>^2=\sigma_1^2\}$。於是 $\mu_{\sigma_1}(A(\sigma_1))=1$，從而 $\mu_{\sigma_2}(A(\sigma_1))=0$，因爲 $\sigma_1\neq\sigma_2$。換言之，μ_{σ_1} 與 μ_{σ_2} 互相奇異。 #

我們已經在空間 E^* 上引入了不可列多個互相奇異的Gauss 測度 μ_σ，$\sigma>0$。今我們改變一下觀點，考慮白噪聲與 $\mathbf{R}^N$ 上的Gauss 測度之關連。利用 $L^2(\mathbf{R})$ 中的完備么正基 $\{\xi_n\}$，我們定義從 E^* 到 $\mathbf{R}^N=\{\tilde{x}=(x_1,x_2,\cdots):x_n\in\mathbf{R}\}$ 的映射

$$T: x\to x_n=\langle x,\xi_n\rangle,\qquad n=1,2,\ldots;\qquad x\in E^*, \tag{3.23}$$

則 T 爲蓋射。令 $\mathbf{R}^N$ 的柱集所生成的 σ 環記爲 $\widetilde{\mathfrak{B}}$。顯然，T 爲從 $(E^*,\mathfrak{B})$ 到 $(\mathbf{R}^N,\widetilde{\mathfrak{B}})$ 的可測變換，因爲對任意 $\mathbf{R}^N$ 中的柱集 A，其逆影 $T^{-1}A$ 爲 E^* 中的柱集。從而我們可以在 $(\mathbf{R}^N,\widetilde{\mathfrak{B}})$ 上引入一個機率測度 $\tilde{\mu}$，定義如下：

$$\tilde{\mu}(B)=\mu(T^{-1}B),\qquad B\in\mathfrak{B}. \tag{3.24}$$

換言之，$\tilde{\mu}=T^{-1}\circ\mu$，今 $<x,\xi_n>$ 爲獨立的標準的 Gauss 型隨機變數。由此事實與 (3.24) 可知，$\{X_n(\tilde{x})\}$，其中 $X_n(\tilde{x})=x_n$，亦構成 $(\mathbf{R}^N,\widetilde{\mathfrak{B}},\tilde{\mu})$ 上的互相獨立的標準的Gauss 型隨機變數。因此 $\mathbf{R}^N$ 上的測度 $\tilde{\mu}$ 可視爲可列多個標準的 Gauss 分佈的直積。機率空間 $(\mathbf{R}^N,\widetilde{\mathfrak{B}},\tilde{\mu})$ 稱爲離散參數的白噪聲，它很自然在我們的架構下出現。若 $X_n(\tilde{x})$ 的變異數 σ^2 不等於 1，則稱 $(\mathbf{R}^N,\widetilde{\mathfrak{B}},\tilde{\mu})$ 爲具有變異數 σ^2 之白噪聲。

爲了在 $\mathbf{R}^N$ 上定義這種測度 $\tilde{\mu}$，我們可以由一組共容的岸界分佈出發，利用Kolmogorov延拓定理來建構 $\tilde{\mu}$。爲此，我們令 $(\mathbf{R}^N)_0=\{a=(a_1, a_2, \cdots)\in\mathbf{R}^\infty$，且從某一位之後皆爲 $0\}$。取一個元素 $(a_1, a_2, \cdots)\in(\mathbf{R}^N)_0$，給出 $\Sigma_j a_j X_j(\tilde{x})$ 的分佈或特徵函數。後者實際上是

$$\int_{\mathbf{R}^\infty}\exp\left[i\sum_j a_j X_j(\tilde{x})\right]d\tilde{\mu}(\tilde{x})=\int_{E^*}\exp\left[i\sum_j a_j\langle x,\xi_j\rangle\right]d\mu(x)$$
$$=\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_j a_j^2\|\xi_j\|^2\right]=\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_j a_j^2\right].$$

今探討測度 $\tilde{\mu}$ 的擔台。雖然計算很簡單，但却有助於了解定理 3.1 。

【命題3.2】

$\mathbf{R}^\infty$的子集 $l^2=\{\tilde{x}=(x_1, x_2, \cdots): \Sigma x_n^2<\infty\}\in\tilde{\mathfrak{B}}$，並且 $\tilde{\mu}(l^2)=0$。

【證明】 $\tilde{x}$ 屬於 l^2 的充要條件是對任意 $\varepsilon>0$，存在N使得 $\Sigma_m^n x_k^2<\varepsilon$，$\forall n>m>N$。因此 l^2 可表成

$$l^2=\bigcap_p\bigcup_N\bigcap_{n>m\ge N}\left\{\tilde{x}:\sum_m^n x_k^2<\frac{1}{p}\right\}. \tag{3.25}$$

因爲大括號的集合是柱集，故我們已經證明了 $l^2\in\tilde{\mathfrak{B}}$。

今由命題 3.1 的證明過程之論證知

$$\lim_{N\to\infty}N^{-1}\sum_1^N x_n^2=\lim_{N\to\infty}N^{-1}\sum_1^N X_n(\tilde{x})^2=1 \text{ 一殆遍 } (\tilde{\mu}).$$

從而，除了一個 $\tilde{\mu}$——零測 $\tilde{x}$ 集之外，$\Sigma_n x_n^2=\infty$。但是集 l^2 落在上述零測集之中，故 $\tilde{\mu}(l^2)=0$。 #

考慮序列 $\{x_n\}$ 的加權和之收斂問題是有趣的。令 $\{\lambda_n\}$ 爲一實數列，滿足

$$\sum_n\lambda_n^2<\infty,\quad \lambda_n\neq 0\ \ \forall n, \tag{3.26}$$

並且定義空間$\widetilde{E}$為

$$\widetilde{E}=\left\{\tilde{a}=(a_1,a_2,\ldots):\sum_n \frac{a_n^2}{\lambda_n^2}=\|\tilde{a}\|_1^2<\infty\right\}.$$

在範數$\|\cdot\|_1$之下，$\widetilde{E}$成爲一個Hilbert空間。進一步，因爲$\Sigma_n\lambda_n^2 x_n^2$的期望值爲$\Sigma_n\lambda_n^2<\infty$，故

$$\sum_n \lambda_n^2 x_n^2=\sum_n \lambda_n^2 X_n(\tilde{x})^2<\infty,\ \text{一殆遍}\ (\tilde{\mu}). \tag{3.27}$$

又因爲$\Sigma_n\lambda_n^4<\infty$，故級數$\Sigma_n\lambda_n^2(X_n(\tilde{x})^2-1)$在$L^2(\mathbf{R}^\infty,\widetilde{\mathfrak{B}},\tilde{\mu})$中收斂。。今引入範數$\|\tilde{x}\|_{-1}=(\Sigma_n\lambda_n^2x_n^2)^{1/2}$。對於$\tilde{a}\in\widetilde{E}$級數$\Sigma_n a_n x_n$對殆遍的$x$收斂，並且

$$\left|\sum_n a_n x_n\right|\le\left(\sum_n\frac{a_n^2}{\lambda_n^2}\sum_n\lambda_n^2x_n^2\right)^{1/2}=\|\tilde{a}\|_1\,\|\tilde{x}\|_{-1}. \tag{3.28}$$

今我們令

$$\widetilde{E}^*=\{\tilde{x}\in\mathbf{R}^\infty:\|\tilde{x}\|_{-1}<\infty\}.$$

這是一個以$\|\cdot\|_{-1}$爲Hilbert範數的Hilbert空間，並且在雙線性形式$\Sigma_n a_n x_n$之下，是$\widetilde{E}$的偶件空間。$\widetilde{E}$，l^2與$\widetilde{E}^*$之間的包含關係爲

$$\widetilde{E}\subset l^2\subset\widetilde{E}^*, \tag{3.29}$$

並且由（3.26）很容易看出從左到右的嵌射爲Hilbert-Schmidt算子。

進一步我們可以仿（3.25）證明$\widetilde{E}^*\in\widetilde{\mathfrak{B}}$。利用這個結果與（3.29），我們就得到

【命題 3.3】
$\widetilde{E}^*\in\widetilde{\mathfrak{B}}$且$\tilde{\mu}(\widetilde{E}^*)=1$。

現在我們可以來談論白噪聲與Wiener過程的時間導微（看作是隨機荷佈）的關連，這是我們在序文中以及在第3.1節開頭已提到過的。首先

(a)我們可以利用特徵泛函來說明，因為 Wiener 過程的時間導微之特徵泛函是第 3.3 節例 3（3.17），但將 ξ 改成 $-\xi'$。於是有

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^\infty |-\xi'(t)|^2\, dt\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\|\xi\|^2\right],$$

其中 $\|\cdot\|$ 為 $L^2([0,\infty))$ 的範數，這就是白噪聲的特徵泛函。其次(b)我們可以利用形式上直觀的看法來說明，如下：在白噪聲的測度空間 $(E^*, \mathfrak{B}, \mu)$ 上令

$$W(t, x) = \langle x, \chi_{[t\wedge 0,\, t\vee 0]}\rangle, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{3.30}$$

上式中的示性函數 χ 不屬於 E 但是可以利用 E 中的序列 $\{\xi_n\}$ 來逼近，其中序列 $\{\xi_n\}$ 使得隨機變數 $<x, \xi_n>$ 均方收斂。於是我們視（3.30）的右項為如此的極限，詳情留待第四章再述。隨機變數 $W(t, x)$ 為 Gauss 型，具有平均值 0 與變異數 $\|\chi\|^2 = |t|$。復次，我們看出 $\{W(t, x): -\infty < t < \infty\}$ 為一個 Wiener 過程，以 $\mathbf{R}$ 為時軸。於是我們有 $d/dt\, W(t, x) = x(t)$，$t > 0$，之形式上關係，並且元素 $x \in (E^*, \mathfrak{B}, \mu)$ 可看作是 Wiener 過程的樣本函數之導微。然而，如第 2.2 節 [1] 所預示的，我們對此事必須小心。

令 $\{W(t): -\infty < t < \infty\}$ 為 Wiener 過程，作其增分過程 $\Delta W(t) = W(t+b) - W(t+a)$，$\Delta = (a, b]$。由定義知，$\{\Delta W(t): -\infty < t < \infty\}$ 為一定常 Gauss 過程並且此定常性可被白噪聲所繼承。亦即，在所有樣本荷佈的變數同時平移之下，μ 是不變的。我們可以利用本章的架構，立即給出定常性的直觀概念。$x \in E^*$ 的變數之移位（shift）（簡稱為移位），可以利用 ξ 的移位（見第 4.4 節）來定義，並且 μ 的不變性可以利用其特徵泛函 $C(\xi)$ 來定義。

我們定義移位（shift）S_t 為 $(S_t\xi)(u) = \xi(u-t)$。

【定義 3.4】

若 S_t 為 E 的一個自同構（automorphism）並且

$$C(S_t\xi) = C(\xi), \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.31}$$

則（E^*，$\mathfrak{B}$，μ）稱爲一個定常隨機荷佈。

【註解】　我們通常要求移位 S_t 對 t 是連續的。當 E 爲 $\mathscr{S}$，$\mathscr{D}$，或 D_0 之一時，這個要求自動滿足。

下面的命題很容易證明。

【命題 3.4】

白噪聲是一個定常隨機荷佈。

本章最後我們解釋白噪聲這個術語中"白"字的意思。一般而言，任何均方連續的定常過程 $\{X(t): -\infty < t < \infty\}$ 具有 $E\{X(t)\}=0$ 者，都有如下的値譜分解

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, dM(\lambda).$$

其中 $dM(\lambda)$ 爲適當的隨機測度［參見 J.L.Doob（1953）第XI章］。對應地，一個定常的隨機荷佈也有如下的値譜分解

$$\langle x, \xi \rangle = \int \hat{\xi}(\lambda)\, dM(\lambda), \tag{3.32}$$

其中 $\hat{\xi}$ 表 ξ 的 Fourier 變換。對於白噪聲的値譜分解就牽涉到"平頭"値譜，$E|dM(\lambda)|^2 = d\lambda$，亦即値譜均勻分佈於整個實數軸上，因而得到"白"字之名。這種 x 可看作是電路網中熱噪聲（thermal noise）的理想形態，這些考慮導致我們採用白噪聲這個術語。除了 Wiener 過程外，無疑地，白噪聲在機率論、訊息論及隨機漲落出現的其它領域都佔有光榮地位。

【註解】　其它具有平頭値譜的定常隨機荷佈，即使它們不是Gauss型分佈，也稱爲白噪聲。這些當中，我們發現在應用上出現的有 Poisson 型的白噪聲。

第四章

Wiener過程的泛函

本章我們要來探討 Wiener 過程的泛函，這通常是非線性的，記成：

$$\Phi(W(t,\omega): t \in T). \tag{4.1}$$

我們有興趣於探討這種泛函的理由，等到本章與以下諸章逐步進行時就會明白了。形如（4.1）之泛函或一族泛函，往往出現爲非線性設計的輸出產品，而以 Wiener 過程爲輸入品；或是出現爲某些隨機微分方程的解答。因此分析這種泛函，並且應用所發展的理論到如非線性預測之實際問題，是一個很重要的實用問題。因爲（4.1）之泛函 Φ 可以看作是具有無窮維變數 $\{W(t): t \in T\}$ 之函數，故對 Φ 的分析就是典型的無窮維空間上的分析學。因此我們將採用泛函分析的觀點來展開工作。我們發現的結果在物理學，尤其是力學與電機學上都有廣泛的應用。

4-1 基本的泛函

因爲 Wiener 過程具有獨立增分性，這在離散參數情形的類推就是獨立隨機變數之和。爲了分析這種和的泛函，我們通常把它們直接表成獨立隨機變數，並且類似地，我們將（4.1）寫成下形

$$\varphi(W'(t,\omega): t \in T), \qquad W'(t) = \frac{d}{dt}W(t) \quad (=\dot{W}(t)) \tag{4.2}$$

複習一下，當 $T=(-\infty,\infty)$ 時，$\{W'(t): t \in T\}$ 的分佈剛是第 3.3 節例 1 所述的白噪聲 $(\mathscr{S}^*, \mathfrak{B}, \mu)$。假設我們所要研究的隨機變數具有有限變異數，則我們的問題就是去解析泛函

$$\varphi(x) \in L^2(\mathscr{S}^*, \mu), \tag{4.3}$$

其中 $L^2(\mathscr{S}^*, \mu)$ 表對 μ 平方可積的所有複數值函數。由於這個空間經常

出現，我們簡記爲 (L^2)。

澄清了我們的目標之後，現在開始討論最基本的一類 x 的泛函。除非特別聲明，本章的基本核式空間皆取爲 $\mathscr{S}$。

(a) **多項函數**。令 $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 爲實變數 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的多項式，具有複數係數。利用 P，我們定義

$$\varphi(x) = P(\langle x, \xi_1\rangle, \langle x, \xi_2\rangle, \ldots, \langle x, \xi_n\rangle). \tag{4.4}$$

這個泛函稱爲 $x \in \mathscr{S}^*$ 的**多項式**，並且 φ 的次數用 P 的次數來定義。若 P 的次數爲 d，則稱 φ 的次數至多爲 d，若 x 的多項式之次數至多爲 d 但不是至多爲 $d-1$，則此多項式的次數正好是 d。$\varphi(x)$ 之表現成 (4.4) 式並不唯一，但是若 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 爲線性獨立，則上述所定義的 $\varphi(x)$ 之次數就等於 P 的次數。我們將省略掉單項式、齊次多項式這些術語的定義，因爲它們跟有限維空間的情形具有相同的用法。

【命題 4.1】

所有 $x \in \mathscr{S}^*$ 的多項式皆屬於 (L^2)。

【證明】 回想一下，對固定的 ξ，$\langle x, \xi\rangle$ 爲機率空間 $(\mathscr{S}^*, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的一個 Gauss 隨機變數，具有平均值 0 與變異數 $\|\xi\|^2$（$\|\cdot\|$ 表 $L^2(\mathbf{R})$ 範數）。因此我們有

$$\int |\langle x, \xi\rangle|^{2n}\, d\mu(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\|\xi\|^{2n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

從而得到 $\langle x, \xi\rangle^n \in (L^2)$。由 Schwartz 不等式可以證明，形如 $\langle x, \xi_1\rangle^{k_1}\langle x, \xi_2\rangle^{k_2}\cdots\langle x, \xi_n\rangle^{k_n}$ 之單項式屬於 (L^2)，於是任何多項式亦屬於 (L^2)。 #

(b) **指數函數**。形如

$$\varphi(x) = \exp[\alpha\langle x, \xi\rangle], \qquad \alpha \in \mathbf{C}, \tag{4.5}$$

之泛函稱爲 $\mathscr{S}^*$ 上的一個**指數函數**。

【命題 4.2】

所有$\mathscr{S}^*$上的指數函數皆屬於(L^2)。

【證明】 在(4.5)式中取$\alpha = a + ib$，a，$b \in \mathbf{R}$，則我們有

$$\int |\varphi(x)|^2 \, d\mu(x) = (2\pi)^{-1/2} \|\xi\|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[2at - \frac{t^2}{2} \|\xi\|^{-2}\right] dt < \infty,$$

這就證明了我們的斷言。 #

正如我們已看過的，$\mathscr{S}^*$上的多項函數與指數函數都很容易定義。這對我們特別有興趣，因爲在下一節我們將證明，由多項函數或指數函數所張拓成的子空間稠密於(L^2)。由於有這個結果，我們將先對(L^2)中的這些基本泛函定義運算或變換，然後延拓到整個空間(L^2)。因此這兩類基本泛函對發展(L^2)上的分析學扮演了一個很重要的角色。

4·2　(L^2)空間的 Wiener-Itô 分解

由形如

$$\exp[i\langle x, \xi\rangle], \qquad \xi \in \mathscr{S}, \tag{4.6}$$

的指數所張拓成的複向量空間構成一個代數(algebra)記爲**A**。

【定理 4.1】

代數**A**稠密於(L^2)

【證明】 只需證明：若$\varphi(x) \in (L^2)$直交於所有形如

$$\prod_1^n \exp[it_k\langle x, \xi_k\rangle] = \exp\left[i\langle x, \sum_k t_k \xi_k\rangle\right], \qquad t_k \in \mathbf{R}, \quad \xi_k \in \mathscr{S},$$

之泛函，則$\varphi(x) = 0$，μ－殆遍。固定$\xi_1, \cdots, \xi_n$並且假設對任意t_k，$1 \leq k \leq n$，我們有

$$\int_{\mathscr{S}^*} \prod_1^n \exp[it_k\langle x, \xi_k\rangle] \overline{\varphi(x)} \, d\mu(x) = 0.$$

如果$\mathfrak{B}_n \subseteq \mathfrak{B}$為由$\langle x, \xi_1 \rangle$，⋯，$\langle x, \xi_n \rangle$所生成的$\sigma$環，則上式可重寫成

$$\int_{\mathscr{S}^*} \exp\left[i \sum_1^n \langle x, \xi_k \rangle t_k\right] E\{\overline{\varphi(x)} \mid \mathfrak{B}_n\}\, d\mu(x) = 0.$$

此等式對任意$t_k \in \mathbf{R}$，$1 \leq k \leq n$，皆成立。因為它是對$\langle x, \xi_k \rangle$的聯合分佈來作積分的，故利用Fourier變換的一個性質，我們就得到

$$E\{\overline{\varphi(x)} \mid \mathfrak{B}_n\} = 0, \quad (\mu)\text{-殆遍}$$

今補上ξ_k，$k \geq n+1$，使得$\{\xi_n\}$變成(L^2)的一個完備基底，則$\mathfrak{B}_n$單調遞增到$\mathfrak{B}$。因此我們可推得

$$E\{\overline{\varphi(x)} \mid \mathfrak{B}\} = \overline{\varphi(x)} = 0, \quad (\mu)\text{-殆遍}$$

這就完成了證明。

所有x的多項函數也構成一個代數，記為P。

【推論】 代數P稠密於(L^2)

【證明】 因為Taylor展式

$$\exp[i\langle x, \xi \rangle] = \sum_0^\infty \frac{[i\langle x, \xi \rangle]^n}{n!}$$

殆遍且(L^2)收斂，故A的任意元素可以利用多項函數來逼近。從而P亦稠密於(L^2)。 #

取一組完備么正基底$\{\xi_n\} \subseteq (L^2)$使得對任意$n$，$\xi_n \in \varphi$。將$\xi \in \varphi$展成

$$\xi = \sum_0^\infty a_n \xi_n,$$

於是，$\langle x, \xi \rangle$可表成均方極限：

$$\langle x, \xi\rangle = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{1}^{N} a_n \langle x, \xi_n\rangle.$$

復次，$\langle x, \xi\rangle$的任何冪次方都可以用$\langle x, \xi_n\rangle$，$n\geq 1$，的多項函數列來逼近，因此我們就得到：

【推論2】 設$\{\xi_n\}\subseteq\mathscr{S}$爲$L^2(\mathbf{R})$的完備么正基底，則所有形如

$$\prod_j \langle x, \xi_j\rangle^{n_j}, \qquad n_j\geq 0, \qquad j=1,2,\ldots, \tag{4.7}$$

之有限乘積張拓成一個稠密於(L^2)的子空間。

設$H_n(u)$，$n\geq 0$，$u\in\mathbf{R}$，爲Hermite多項式所成的序列，詳情及定義公式請參見第A.5節[1]。再設$\{\xi_n\}$爲如上面所述。

【定義4.1】

所謂一個建基在$\{\xi_n\}$上的Fourier-Hermite多項式是指x的多項式，可表成如下形之有限乘積者：

$$\varphi(x) = c\prod_j H_{n_j}\left(\frac{\langle x, \xi_j\rangle}{\sqrt{2}}\right), \qquad c \text{ 爲常數} \tag{4.8}$$

現在我們來計算這種多項式的(L^2)一範數。因爲$\langle x, \xi_j\rangle$，$j\geq 1$，互相獨立，故我們有

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{S}^*} |\varphi(x)|^2\, d\mu(x) &= |c|^2 \prod_j \int_{\mathscr{S}^*} H_{n_j}\left(\frac{\langle x, \xi_j\rangle}{\sqrt{2}}\right)^2 d\mu(x)\\ &= |c|^2 \prod_j (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} H_{n_j}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 \exp\left[-\frac{1}{2}t^2\right] dt \\ &= |c|^2 \prod_j n_j!\, 2^{n_j},\end{aligned} \tag{4.9}$$

其中最後一式的積分我們用到了第A.5節的公式（A.24′）。取$c = ((\Pi_j n_j 2^{n_j})^{-1/2}$並且將Fourier-Hermite多項式排成序列φ_1，φ_2，…，φ_n，…。

【定理 4.2】

上述定義的么正化Fourier-Hermite多項式 $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ 構成 (L^2) 的完備么正基底。

【註解】 這個定理不過是Cameron與Martin (1947 , b)的一個結果之改述。

【定理4.2之證明】 首先我們證明 $\{\varphi_n\}$ 是直交系統。仿 (4.9) 之計算，我們有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathscr{S}^*} \prod_j H_{n_j}\left(\frac{\langle x, \xi_j\rangle}{\sqrt{2}}\right) \cdot \prod_j H_{m_j}\left(\frac{\langle x, \xi_j\rangle}{\sqrt{2}}\right) d\mu(x) \\
&= \prod_j \int_{\mathscr{S}^*} H_{n_j}\left(\frac{\langle x, \xi_j\rangle}{\sqrt{2}}\right) H_{m_j}\left(\frac{\langle x, \xi_j\rangle}{\sqrt{2}}\right) d\mu(x) \\
&= \prod_j n_j!\, 2^{n_j}\, \delta_{n_j, m_j}.
\end{aligned}$$

因此若對某 j $n_j \neq m_j$，亦即若 φ_n 皆相異，則它們互成直交。

今已知任何形如 (4.7) 之單項式可以表成次數 $\leq \Sigma_j n_j$ 之 Fourier-Hermite 多項式之和，再加上推論 2 ，就證明了 $\{\varphi_n\}$ 張拓成 (L^2)，定理證畢。 #

令 $\mathscr{H}_n \subseteq (L^2)$ 表由所有次數爲 n 之Fourier-Hermite 多項式所生成的子空間。

【定義 4.2】

我們稱 $\mathscr{H}_n$ 爲次數是 n 的多重Wiener 積分。

【註解】 上述"積分"一詞的意義，留得下一節講過 $\mathscr{H}_n$ 的元素之積分表現後，加以澄清。

【定理 4.3】 [N.Wiener (1938) , K. Itô (1951 b)]

Hilbert 空間 (L^2) 可表成如下的直和分解：

$$(L^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathscr{H}_n. \tag{4.10}$$

這個定理是定理 4.2 及 $\mathscr{H}_n$的定義之立即推論。

【觀察】 令 S^N 表 $\mathbf{R}^{N+1}$ 中的N維球面，且 σ_N 表 S^N 上的均匀（即旋轉不變）測度。如所週知的，我們有下面的直和分解

$$L^2(S^N, \sigma_N) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathscr{H}_n \tag{4.11}$$

其中 $\mathscr{H}_n$ 爲由 n 次球面調和函數所張拓成的向量空間。當我們比較（4.10）與（4.11）時，我們發現了極大的類似性，但是前者建立在無窮維空間上（不像S^N是有限維空間），故我們也發現了它們之間的差異性。在探討無窮維分析學時，某些差異性對我們是很重要的，有趣的是它可暗示我們以有限維來作逼近的方法。附帶地，我們回想第 3.1 節的觀察，它導致我們直觀地把白噪聲的測度 μ 之擔台想成一個無窮維球面。

4·3 多重 Wiener 積分的表現

首先我們引入一個變換 $\mathscr{T}$，它將(L^2)的元素映成$\mathscr{S}$上的一個泛函：

$$(\mathscr{T}\varphi)(\xi) = \int_{\mathscr{S}^*} \exp[i\langle x, \xi\rangle]\varphi(x)\, d\mu(x), \qquad \varphi \in (L^2). \tag{4.12}$$

【註解】 雖然（4.12）之積分類似於有限維的Fourier變換，但是變換$\mathscr{T}$不具有如我們所期望的(L^2)中的Fourier變換之所有性質。例如，$\mathscr{T}$將(L^2)映成另一個相異於(L^2)的函數空間（$\mathscr{S}$上的泛函所接的空間，而不是$\mathscr{S}^*$）。

令 F 表(L^2)在$\mathscr{T}$的映射下之影集。由定義知$\mathscr{T}$是線性的，故 F 爲一個向量空間。事實上我們有

【命題 4.3】

變換$\mathscr{T}$爲向量空間(L^2)與 F 之間的同構。

【證明】 由定理 4.1 知，若$(\mathscr{T}\varphi)(\xi)\equiv 0$ 則 $\varphi(x)=0$，μ－殆遍。因此$\mathscr{T}$爲嵌射。又因爲$\mathscr{T}$爲線性，故兩向量空間(L^2)與 F 同構。 #

我們也可以對 F 引入內積構造，使得 $\mathscr{T}$ 成爲Hilbert 空間之間的同構。首先，我們從代數A 中取一個可表成下列之泛函 φ ：

$$\varphi(x)=\sum_j a_j \exp[i\langle x,\eta_j\rangle].$$

於是

$$\begin{aligned}(\mathscr{T}\varphi)(\xi)&=\sum_j a_j\int_{\mathscr{S}^*}\exp[i\langle x,\xi+\eta_i\rangle]\,d\mu(x)\\&=\sum_j a_jC(\xi+\eta_j).\end{aligned}\tag{4.13}$$

再取另一個泛函 $\psi(x)=\exp[-i\langle x,\eta\rangle]$ ，而得

$$(\mathscr{T}\psi)(\xi)=C(\xi-\eta).$$

從而得到

$$(\varphi,\psi)_{(L^2)}=\int_{\mathscr{S}^*}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,d\mu(x)=\sum_j a_jC(\eta+\eta_j).$$

由此我們看出，若欲 $\mathscr{T}$ 爲Hilbert 空間 (L^2) 與 F 之間的同構，則在 F 中必須引入如下的內積：

$$(\mathscr{T}\varphi,\mathscr{T}\psi)_F=(\varphi,\psi)_{(L^2)}.$$

但這意謂着左項必等於 $\Sigma_j a_j C(\eta+\eta_j)$ ，而這又恰爲 $\mathscr{T}\varphi$ 在 η 的取值：

$$(\mathscr{T}\varphi)(\eta)=\sum_j a_jC(\eta+\eta_j).$$

今上述的 φ 正好是A 中元素的一般形式，而A 稠密於 (L^2)（定理 4.1），故必有

$$(f(\cdot),C(\cdot-\eta))_F=f(\eta)\ \forall\text{任意}\quad f(\cdot)\in F.\tag{4.14}$$

今讓上式的 η 變動，並且作 $C(\cdot-\eta_j)$ 之線性組合，則上述對 $\mathscr{T}(A)\subseteq F$ 所引入的內積將完全確定下來。進一步，$\mathscr{T}(A)$ 對誘導的範數作完備化就得

到 F（同構於 (L^2)）。

將上述結果總結成下列敍述：

1. 核 $C(\xi-\eta)$，$(\xi,\eta)\in\mathscr{S}\times\mathscr{S}$，爲（嚴格）正定：

$$\text{即}\quad \sum_{j,k} a_j\bar{a}_k C(\xi_j-\xi_k)\ge 0,\qquad a_j\in\mathbf{C},\qquad \xi_j\in\mathscr{S},$$

且 $=0$ 若且唯若 $a_j=0$，$\forall j$。

2. $(f(\cdot),C(\cdot-\eta))=f(\eta)$，$\forall f\in\mathbf{F}$。
3. F 由 $C(\cdot-\eta)$，$\eta\in\mathscr{S}$，所張拓成。

一個如 F 的Hilbert 空間稱爲一個再生核 Hilbert 空間且 $C(\xi-\eta)$ 稱爲 F 的再生核。

【定理 4.4】

在變換 $\mathscr{T}$ 之下，Hilbert 空間 (L^2) 同構於再生核 Hilbert空間F，以 $C(\xi-\eta)$，$(\xi,\eta)\in\mathscr{S}\times\mathscr{S}$，爲再生核。

當 $\mathscr{T}$ 局限到子空間 $\mathscr{H}_n$ 時，則這個變換可以明白寫出。爲了說明這個事實，我們以Hermite多項式爲母生成函數所表成的指數函數 $\varphi(x)$ 當作出發點：

$$\varphi(x)=\exp\left[\frac{2t\langle x,\eta\rangle}{\sqrt{2}}-t^2\right]=\sum_0^\infty\frac{t^k}{k!}H_k\left(\frac{\langle x,\eta\rangle}{\sqrt{2}}\right),\tag{4.15}$$

其中 $\|\eta\|=1$。因爲 $\varphi\in(L^2)$，故 φ 可被 $\mathscr{T}$ 作用而得

$$\begin{aligned}(\mathscr{T}\varphi)(\xi)&=\exp(-t^2)\int_{\mathscr{S}^*}\exp[\sqrt{2}t\langle x,\eta\rangle+i\langle x,\xi\rangle]\,d\mu(x)\\&=\exp\left[-t^2-\frac{1}{2}\|\xi\|^2+i\sqrt{2}t(\eta,\xi)+t^2\right]\\&=C(\xi)\sum_{k=0}^\infty\left[\frac{(i\sqrt{2}t)^k}{k!}\right](\eta,\xi)^k,\end{aligned}\tag{4.16}$$

其中 (η,ξ) 爲 $L^2(\mathbf{R})$ 的內積構造。仍然假設 $\|\eta\|=1$，我們比較上式與（4.15）式，得到

$$\left(\mathscr{T}H_k\left(\frac{\langle\cdot,\eta\rangle}{\sqrt{2}}\right)\right)(\xi)=C(\xi)(i\sqrt{2})^k(\eta,\xi)^k. \tag{4.17}$$

關係式（4.17）可以推廣到建基於某固定完備么正基 $\{\eta_n\}$（譬如說）的 Fourier-Hermite 多項式，其中 $\{\eta_n\}\subset\mathscr{S}$。假設 $\varphi(x)$ 形如

$$\varphi(x)=\prod_j H_{k_j}\left(\frac{\langle x,\eta_j\rangle}{\sqrt{2}}\right). \tag{4.18}$$

則 ξ 可記成 $\xi=\Sigma_j t_j\eta_j+\xi'$，其中 ξ' 直交於 η_j，這些 η_j 就取爲（4.18）式的 η_j。有了這些，由（4.17）我們就得到

$$\begin{aligned}(\mathscr{T}\varphi)(\xi)&=\int_{\mathscr{S}^*}\exp\left[i\sum_j t_j\langle x,\eta_j\rangle+i\langle x,\xi'\rangle\right]\prod_j H_{k_j}\left(\frac{\langle x,\eta_j\rangle}{\sqrt{2}}\right)d\mu(x)\\&=\int_{\mathscr{S}^*}\exp[i\langle x,\xi'\rangle]\,d\mu(x)\\&\quad\cdot\prod_j\int_{\mathscr{S}^*}\exp[it_j\langle x,\eta_j\rangle]H_{k_j}\left(\frac{\langle x,\eta_j\rangle}{\sqrt{2}}\right)d\mu(x)\\&=\exp\left[-\frac{1}{2}\|\xi'\|^2\right]\prod_j\exp\left[-\frac{1}{2}t_j^2\right](\sqrt{2}\,i)^{k_j}(\eta_j,t_j\eta_j)^{k_j}\end{aligned}$$

注意到 $t_j=(\eta_j,\xi)$ 且 $\|\xi\|^2=\Sigma_j t_j^2+\|\xi'\|^2$，故我們可將上面最後一式表成下形

$$(\sqrt{2}\,i)^nC(\xi)\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n}[\eta_1(t_1)\cdots\eta_1(t_{k_1})\eta_2(t_{k_1+1})\cdots\eta_2(t_{k_1+k_2})\cdots]\\ \times\xi(t_1)\cdots\xi(t_n)\,dt_1\cdots dt_n,$$

其中 $n=\Sigma_jk_j$。我們用記號 $F(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 表示中括號[ ]的項乘以 $2^{n/2}$。我們看出，若 F 用其對稱化 $\hat{F}$ 取代，積分值是不變的，其中 $\hat{F}$ 定義爲

$$\hat{F}(t_1,t_2,\ldots,t_n)=\frac{1}{n!}\sum_\pi F(t_{\pi(1)},t_{\pi(2)},\ldots,t_{\pi(n)}),$$

而 π 表 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的置換，並且 Σ_π 是對所有置換來求和的。F 與 $\hat{F}$ 都

是$L^2(\mathbf{R}^n)$中的函數並且具有範數：

$$\|F\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = 2^{n/2},$$
$$\|\hat{F}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \left(\prod_j k_j!\right)^{1/2} (n!)^{-1/2} 2^{n/2}.$$

復次，我們可以利用（4.9）來證明（4.18）中的φ之(L^2)範數為

$$\|\varphi\|_{(L^2)} = \left(\prod_j k_j\right)^{1/2} 2^{n/2}.$$

因此$L^2(\mathbf{R}^n)$中的一個對稱函數$\hat{F}$可以選取使得$\mathscr{T}\varphi$可表成

$$(\mathscr{T}\varphi)(\xi) = i^n C(\xi) \int_{\mathbf{R}^n} \cdots \int \hat{F}(t_1, t_2, \ldots, t_n)\xi(t_1)\xi(t_2)\cdots\xi(t_n)\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_n, \quad (4.20)$$

其中$n = \Sigma_j k_j$且

$$\|\varphi\|_{(L^2)} = (n!)^{1/2}\|\hat{F}\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \quad (4.21)$$

假設我們已有$\mathscr{H}_n$的一個完備么正基$\{\varphi_m\}$，由Fourier-Hermite多項式所構成。相應於每個φ_m有一個對稱的$L^2(\mathbf{R}^n)$函數$\hat{F}_m$使得

$$\|\hat{F}_m\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = (n!)^{-1/2},$$

參見（4.21）式。這個表現的另一個重要性質是，相應於$\{\varphi_m\}$的$\{\hat{F}_m\}$構成$L^2(\mathbf{R}^n)$的直交系統。對於$\{\varphi_m\}$的任意線性組合，就有相應於$\{F_m\}$之線性組合，因此（4.20）與（4.21）可以推廣成對任意$\varphi(x) \in \mathscr{H}_n$皆適用。這導致我們定義子空間

$$\hat{L}^2(\mathbf{R}^n) = \{F \in L^2(\mathbf{R}^n)\colon F \text{ 是對稱的}\} \subseteq L^2(\mathbf{R}^n),$$

並且敘述出下面定理，在此上述的$\hat{F}$簡記為F。

【定理4.5】

1. 對任意$\varphi \in \mathscr{H}_n$存在有一個函數$F \in \hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$使得

$$(\mathscr{T}\varphi)(\xi) = i^n C(\xi) \int \cdots \int_{\mathbf{R}^n} F(t_1, t_2, \ldots, t_n)\xi(t_1)\xi(t_2) \cdots \xi(t_n)\, dt_1 dt_2 \cdots dt_n,$$

並且映射

$$\varphi \to F \in \hat{L}^2(\mathbf{R}^n), \qquad \varphi \in \mathscr{H}_n,$$

為對射。

2. 在上面的映射下，我們也有下面的關係式

$$\|\varphi\|_{(L^2)} = (n!)^{1/2} \|F\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

透過這個定理，空間$\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$可以看作是$\mathscr{H}_n$的表現或實現，通常稱為**積分表現**(integral representation)，以$\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$函數F為積分表現的核(kernel)。

【註解】 上述表現導致我們可以將同構$\mathscr{T}$記號地寫成

$$(L^2) \cong \sum_{n=0}^{\infty} \oplus\, (n!)^{1/2} \hat{L}^2(\mathbf{R}^n) \qquad (\text{Fock 空間}) \tag{4.22}$$

因為(L^2)的一般元素$\varphi(x)$是荷佈x的非線性函數，故一般而言，無法表成簡單的解析式。但是我們可以將$\varphi(x)$展開成

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x), \qquad \varphi_n(x) \in \mathscr{H}_n, \tag{4.23}$$

然後利用定理4.5，對每個φ_n得到一個積分表現，其中牽涉到一個核$F_n \in \hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$。換言之，$\varphi$有如下的表現

$$\varphi \leftrightarrow F = \{F_n : n \geq 0\} \tag{4.24}$$

其中F_0為常數項，事實上它是φ與1的內積，即φ的期望值。

這個表現的大用處是許多$\mathscr{H}_n$上的有趣算子經由$\mathscr{T}$的變換變成$\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$上的算子，於是可以有效地使用有限維分析學的標準工具來研究問題。這

在以下諸節將逐漸明朗。欲知積分表現的進一步細節，請讀者參見T. Hida（1970 b），T. Hida 與N. Ikeda（1967）及G. Kallianpur（1970）諸篇文章。

4·4 隨機過程

我們原先的目的是要分析隨機過程 $\{X(t): t \in T\}$，將它表成Wiener 過程的泛函。如本章開頭所述，這曾經促動了許多研究工作。本節我們要繼續在這些方向上作探討。

令 $\{T_t: -\infty < t < \infty\}$ 爲白噪聲機率空間 $(\mathscr{S}^*, \mathfrak{B}, \mu)$ 上給定的一個"流"（flow）（即一參數保測變換群）。對於 $\varphi(x) \in (L^2)$，令

$$X(t, x) = \varphi(T_t x), \qquad -\infty < t < \infty. \tag{4.25}$$

則 $\{X(t, x): -\infty < t < \infty\}$ 爲 $(\mathscr{S}^*, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的一個隨機過程。今對 $\mathbf{R}^n$ 的任意 Borel 子集 B_n 及任意 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，我們有

$$\begin{aligned}\{x: (X(t_1 + h, x), \ldots, X(t_n + h, x)) \in B_n\}\\ = T_{-h}\{x: (\varphi(T_{t_1}x), \ldots, \varphi(T_{t_n}x)) \in B_n\},\end{aligned}$$

因爲 T_{-h} 爲保測變換，故有等式

$$\mu((X(t_1 + h), \ldots, X(t_n + h)) \in B_n) = \mu((X(t_1), \ldots, X(t_n)) \in B_n).$$

這表示，過程 $\{X(t, x): -\infty < t < \infty\}$的任意岸界分佈在時間的移位下是不變的，亦即 $\{X(t)\}$ 爲一個定常過程。

以下我們要討論的所有"流"都假設它們滿足下面的條件：映射

$$(t, x) \to T_t x \in \mathscr{S}^*, \qquad (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathscr{S}^*, \tag{4.26}$$

爲 $\mathfrak{B}(\mathbf{R}) \times \mathfrak{B}$ 一可測（參見第 3.4 節的移位）。

今在 (L^2) 上由

$$(U_t\varphi)(x) = \varphi(T_t x), \qquad \varphi \in (L^2), \tag{4.27}$$

所定義的單正算子 $\{U_t: -\infty < t < \infty\}$ 構成了一參數算子群：

$$U_t U_s = U_s U_t = U_{t+s}, \qquad -\infty < t, s < \infty,$$
$$U_0 = I \qquad (\text{單位映射})$$

並且在上述可測性的假設下，單正算子群 $\{U_t\}$ 對 t 是強連續的，亦即

$$s\text{-}\lim_{h \to t} U_h = U_t.$$

此地 s-lim 是指算子的強意味極限。由此得知，由（4.25）所給出的定常過程 $\{X(t, x): -\infty < t < \infty\}$ 是連續的，並且是弱定常的[參見第 1.3 節，[2] ）。

令 P_n 表從 (L^2) 到 $\mathscr{H}_n$ 的直交射影。對固定的 t，我們可以將 $X(t, x)$ 看作是 (L^2) 的一個元素並且若定義 $X_n(t, x)$ 爲

$$X_n(t, x) = P_n X(t, x),$$

則得 $\mathscr{H}_n$ 中的一個隨機過程。原過程 $X(t)$ 可以表成下面的和

$$X(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t, x), \tag{4.28}$$

此地的和是指均方收斂的極限。

回到 U_t，我們可以證明 $U_t \mathscr{H}_n = \mathscr{H}_n$，亦即

$$P_n U_t = U_t P_n, \qquad n \geq 0, \tag{4.29}$$

這是因爲每個 U_t 將一個 Fourier-Hermite 多項式變成另一個同次的 Fourier-Hermite 多項式。由這個關係式我們得到

$$X_n(t, x) = P_n U_t X(0, x) = U_t P_n X(0, x) = U_t X_n(0, x), \tag{4.30}$$

並且得知 $\{X_n(t, x): -\infty < t < \infty\}$，$n = 0, 1, 2, \cdots$ 爲一族互相直交的定常過程。再利用（4.28）得證 $\{X(t, x)\}$ 可直交分解成 $\mathscr{H}_n$，$n \geq 0$，中的定常過程。因此我們可以想得到，一個有效的研究 $\{X(t)\}$ 的方法是將它分解成（4.28）的形式，然後利用積分表現逐部分來研究 $\mathscr{H}_n$ 中

的 $\{X_n(t)\}$ 。我們將展示一個理論。把這個想法作最滿意的實現。

在進入這個主題之前，我們要來介紹由第 3.4 節的移位 $\{S_t\}$ 所引進的流。以下，我們固定取 $\mathscr{S}$ 爲 S_t 所作用的基本核式空間，這樣有關移位，或所誘導出來的流，有許多細緻的性質都可以明白獲致。

$\mathscr{S}$ 上定義爲

$$S_t: \xi(u) \to (S_t\xi)(u) = \xi(u-t), \qquad -\infty < t < \infty, \tag{4.31}$$

之變換 S_t 滿足下列性質：

1. S_t 爲線性同構；
2. $\| S_t \xi \| = \| \xi \|$ ，$\forall \xi \in \mathscr{S}$；
3. $\{S_t : -\infty < t < \infty\}$ 構成一參數群：

$$S_t S_s = S_s S_t = S_{s+t}, \qquad -\infty < t, s < \infty,$$
$$S_0 = I,$$
$$S_t \to I \quad 當 \quad t \to 0.$$

我們利用上述的(1)可以定義同伴算子 $S_t^* = T_t$ ，並且可由 $\mathscr{S}^*$ 與 $\mathscr{S}$ 之間的自然配對 $\langle x, \xi \rangle$ ，$x \in \mathscr{S}^*$ ，$\xi \in \mathscr{S}$ ，關連起來：

$$\langle T_t x, \xi \rangle = \langle x, S_t \xi \rangle. \tag{4.32}$$

由性質(2)得證白噪聲的特徵泛函 $C(\xi)$ 在 S_t 作用下是不變的，亦即：

$$C(S_t\xi) = \exp\left[-\frac{1}{2}\|S_t\xi\|^2\right] = C(\xi).$$

因此 $C(S_t\xi)$ 與 $C(\xi)$ 定義出相同的機率空間。事實上

$$C(S_t\xi) = \int_{\mathscr{S}^*} \exp[i\langle x, S_t\xi\rangle]\, d\mu(x) = \int_{\mathscr{S}^*} \exp[i\langle x, \xi\rangle]\, d\mu(T_t^{-1}x)$$

由此得知 μ 在 T_t 作用下是不變的，亦即

$$T_t \circ \mu = \mu. \tag{4.33}$$

復次，由性質(8)可證得 $\{T_t: -\infty < t < \infty\}$ 構成一個一參數群，亦即 $(\mathscr{S}^*, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的一個流。

回到 S_t，我們注意到，(4.26)的映射之可測性可以很容易證得，因此我們給出如下的

【定義 4.3】

如上述由移位所得到的流 $\{T_t: -\infty < t < \infty\}$ 稱爲Wiener過程的流

本節剩下的篇幅凡是使用流一詞概指Wiener過程的流。因此算子 U_t 皆指利用 T_t 由(4.27)式所定義者。

【註解】 讓我們取第 3.4 節所引進的Wiener過程 $\{\langle x, \chi_{(0,t)}\rangle : t>0\}$，並且用算子 U_t 作用其增分，則得，比如說，

$$U_t\{\langle x, \chi_{[0,b]}\rangle - \langle x, \chi_{[0,a]}\rangle\} = U_t\{\langle x, \chi_{(a,b]}\rangle\} = \langle T_t x, \chi_{(a,b]}\rangle$$
$$= \langle x, \chi_{[0,b+t]}\rangle - \langle x, \chi_{[0,a+t]}\rangle,$$

其中 $b > a > 0$。因此 U_t 定義了時間的移位。上述定義 4.3 可視爲這個觀察在形式上的回應。

進一步發展所需的背景，牽涉到 $\mathfrak{B}$ 的一族子 σ 環 $\{\mathfrak{B}_t: -\infty < t < \infty\}$。令

$$\mathfrak{B}_t = \mathfrak{B}\{\langle x, \xi\rangle : \overline{\mathrm{supp}}(\xi) \subseteq (-\infty, t]\},$$

亦即，$\mathfrak{B}_t$ 表由括號 $\{\cdot\}$ 中的隨機變數所產生的 σ 環。顯然我們有

$$\mathfrak{B}_t \supsetneq \mathfrak{B}_s \quad 當\ t > s\ 時， \tag{4.34}$$

$$\bigvee_t \mathfrak{B}_t = \mathfrak{B}, \tag{4.35}$$

其中左項表示由 $\cup_t \mathfrak{B}_t$ 所產生的 σ 環，並且

$$T_t\mathfrak{B}_s = \mathfrak{B}_{t+s}, \qquad -\infty < t, s < \infty. \tag{4.36}$$

復次我們有下面結果：

【命題 4.4】

$\{\mathfrak{B}_t: -\infty < t < \infty\}$ 滿足

$$\bigcap_t \mathfrak{B}_t = 2 \pmod{\mu}, \tag{4.37}$$

其中 2 表由 ϕ 與 $\mathscr{S}^*$ 所組成的無聊 σ 環。

【證明】 對任意 ξ，我們可以找到序列 $\{\xi_n\}$ 具有緊緻擔台，使得 $<x, \xi_n>$ μ-殆遍收斂到 $<x, \xi>$。取可測集 $F \in \cap_t \mathfrak{B}_t$，並且注意到，由 $\mathfrak{B}_t$ 的定義可知，對任意具有緊緻擔台的 ξ，$\chi_F(x)$ 與 $<x, \xi>$ 互相獨立（見第3.4節）。因此 $\mathfrak{B}_c = \mathfrak{B}\{<x, \xi>$: supp(ξ) 爲緊緻$\}$ 與 F 互相獨立。但是先前我們證明過 $\mathfrak{B}_c$ 與 $\mathfrak{B}$ 相等，而 F 爲 $\mathfrak{B}$ 的元素，故 F 跟自身互相獨立，亦即 $\mu(F) = 0$ 或 1，因此 $F = \phi$ 或 $F = \mathscr{S}^* \pmod{\mu}$。#

此地我們給出一個一般定義。

【定義 4.4】

設 $\{T_t : -\infty < t < \infty\}$ 爲機率空間 $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 上的一個流，若存在一個子 σ 環 $\mathbf{B}_0 \subseteq \mathbf{B}$，使得 $T_t \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_t$，且

1. $\mathbf{B}_t \supseteq \mathbf{B}_s$，若 $t > s$；
2. $\bigvee_t \mathbf{B}_t = \mathbf{B}$；
3. $\bigcap_t \mathbf{B}_t = 2$；

則稱 $\{T_t\}$ 爲一個Kolmogorov 流。

對於Wiener 過程的流，取 $\mathbf{B}_0$ 爲任意 $\mathfrak{B}_t$，則我們發現這個流爲一個Kolmogorov流。現在我們回來探討Wiener 過程的流，下面的結果是命題 4.4 的立即結論。

【推論 1】 如果我們記 $L_t^2 = L^2(\mathscr{S}^*, \mathfrak{B}_t, \mu)$，則有

1. $L_t^2 \supseteq L_s^2$，若 $t > s$；
2. $\bigvee_t L_t^2 = (L^2)$；
3. $\bigcap_t L_t^2 = \{1\}$，由常函數 1 所張拓成的空間。

在上述中，$\bigvee_t L_t^2$ 表由聯集 $\cup_t L_t^2$ 所張拓成的Hilbert 子空間。由這個推

論，又可推得

【推論2】 若對某 a，$\varphi(x)\in L^2_a$，則定常過程 $\varphi(T_t x)$ 爲純粹非定命的（purely non-deterministic）。

【證明】 由假設知

$$\varphi(T_t x)\in L^2_{a+t},$$

故 $\varphi(T_s x)$，$s\le t$，的泛函屬於（L^2）者，亦爲 L^2_{a+t} 的元素。但由上面的推論1(3)得知

$$\bigcap_t L^2_{a+t}=\{1\},$$

故 $\{\varphi(T_t x);-\infty<t<\infty\}$ 爲純粹非定命（參見第1.3節，[2]）。#

今令 $a=0$（爲了簡便起見）並且在推論2中考慮 $\varphi(x)\in L^2_0$。

【命題4.5】

假設 $\varphi(x)\in L^2_0$ 亦爲 $\mathscr{H}_n$ 的元素，則 φ 的積分表現之核 $F\in L^2(\mathbf{R}^n)$ 具有下面性質：

$$F(u_1,u_2,\ldots,u_n)=0 \quad 若\ u_j>0\ 對某\ j\ , \tag{4.38}$$

【證明】 假設 $\operatorname{supp}(\xi)\subseteq[0,\infty)$，則 $<x,\xi>$ 獨立於 $\mathscr{B}_0$，並且 $\varphi(x)\in L^2_0\cap\mathscr{H}_n$ 直交於任何 $<x,\xi>$ 的 Fourier-Hermite 多項式。這種多項式與 $\varphi(x)$ 的內積可以寫成

$$\int_{\mathbf{R}^n}\!\!\cdots\!\int F(u_1,u_2,\ldots,u_n)\xi_1(u_1)\xi_2(u_2)\cdots\xi_n(u_n)\,du_1\,du_2\cdots du_n,$$

其中 $\operatorname{supp}(\xi_j)\subseteq[0,\infty)$ 對某 j，並且它等於0。我們只要注意到這些 ξ 之乘積足夠豐富，就可以推得（4.38）的結論，而完成證明。 #

其次用 U_t 作用如命題4.5中的 φ，因爲我們有

$$(\mathcal{T}\varphi)(\xi) = C(\xi)i^n \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int F(u_1, u_2, \ldots, u_n)\xi(u_1)\cdots\xi(u_n)\, du_1\cdots du_n$$

或

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}(U_t\varphi))(\xi) &= \int_{\mathcal{S}^*} \exp[i\langle x, \xi\rangle]\varphi(T_t x)\, d\mu(x)\\ &= \int_{\mathcal{S}^*} \exp[i\langle T_{-t}x, \xi\rangle]\varphi(x)\, d\mu(x)\\ &= (\mathcal{T}\varphi)(S_{-t}\xi)\\ &= C(\xi)i^n \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int F(u_1 - t, \ldots, u_n - t)\xi(u_1)\cdots\xi(u_n)\, du_1\cdots du_n.\end{aligned}$$

因此$U_t\varphi$的積分表現之核形如

$$F(u_1 - t, u_2 - t, \ldots, u_n - t) \tag{4.39}$$

於是若$u_j > t$對某j，則它等於0。

有了這些性質，再回想一下，U_t與射影算子P_n可交換[(4.29)式]，我們就得到下面的結果。

【命題 4.6】

設$\{X(t)\}$爲由$\varphi \in L_0^2$與U_t所定義出的定常過程：

$$X(t, x) = U_t\varphi(x), \qquad -\infty < t < \infty, \tag{4.40}$$

並且將它分解成(4.28)之形，則每個定常過程$\{X_n(t, x)\}$，$n \geq 1$，定義爲$X_n(t, x) = P_n X(t, x)$，具有積分表現核

$$F_n(u_1 - t, u_2 - t, \ldots, u_n - t),$$

其中$F_n(u_1, u_2, \cdots, u_n)$爲相應於$\varphi_n = P_n\varphi$的核，並且滿足(4.38)。

【例 1】

考慮最簡單的情形：$n = 1$，$\varphi \in L_0^2 \cap \mathscr{H}_1$，且$X_1(t, x) = U_t(x)$ $-\infty < t < \infty$。定常過程$\{X_1(t)\}$具有平均值爲0的Gauss分佈，均方連續，且純粹非定命。進一步$X(0)$的積分表現核$F(u)$爲一個$L^2(\mathbf{R})$函數，在$[0, \infty)$上取值爲0。下一節我們將證明$X_1(t, x)$可表成適機

分

$$X_1(t, x) = \int_{-\infty}^{t} F_1(u-t)\, dW(u, x), \tag{4.41}$$

其中 $\{W(u, x)\}$ 爲（3.30）所給的Wiener過程：

$$W(u, x) = \langle x, \chi_{[u \wedge 0,\, u \vee 0]} \rangle.$$

令 $\mathfrak{B}_t(X_1)$ 表由 $X_1(s, x)$，$s \le t$，所生成的 σ 環，則由（4.41）之表現得知

$$\mathfrak{B}_t(X_1) \subseteq \mathfrak{B}_t, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{4.42}$$

特別地，如果對任意 t，（4.42）等號成立，則（4.41）稱爲 $\{X_1(t)\}$ 的**典型表現**（canonical representation）並且稱 F_1 爲典型核（canonical kernel）。當典型表現一經給定，或至少典型核爲已知時，則由此核我們可以得到樣本路徑的性質，利用（4.41）可得 $X_1(t)$ 的未來值之最佳預測子（predictor），以及其它有趣的結果。

【觀察】（4.41）式告訴我們，將Volterra型的積分算子 $F_1(t-u)$ 作用到 $dW(u)$ 就可得到 $X_1(t)$。有了這個認識，我們看出，使（4.41）成爲典型表現之條件 $\mathfrak{B}_t(X_1) = \mathfrak{B}_t$，在某種意味下，牽涉到此積分算子的逆映射之存在性。進一步，上述的表現爲"因果的"（causal），其意爲逆算子線性地作用到 $\{X(s): s \le t\}$ 復得 $dW(t)$。因此典型表現的理論，不只是在機率論中有興趣。而且它還在資訊理論與電機工程的應用上有密切關連。這些可參見P. Lévy（1956）與T. Hida（1960）的文章。

【例2】

另一個有趣的例子可從 $n = 2$ 的情形得到。對於 $\varphi(x) \in L_0^2 \cap \mathscr{H}_2$，我們令

$$X_2(t, x) = U_t \varphi(x), \qquad -\infty < t < \infty.$$

$X_2(t, \omega)$ 的積分表現核可以寫成

$$F_2(u_1 - t, u_2 - t),$$

並且過程$X_2(t, x)$可以利用F_2是一個$\hat{L}^2(\mathbf{R}^2)$核來加以解析地處理。不像例 1，我們必須注意不等式

$$\mathfrak{B}_t(X_2) \subsetneq \mathfrak{B}_t \tag{4.43}$$

對任意$t \in (-\infty, \infty)$皆成立。我們在第 4.6 節會再回來討論這個泛函。

目前我們暫時忘掉 Wiener 過程的流$\{T_t\}$，但是我們將經常使用$\mathfrak{B}_t = \mathfrak{B}_t(W)$所成的一族遞增的$\sigma$環。

【命題 4.7】

1. 若$\varphi(x) \in \mathscr{H}_n\ (n \geq 1)$，則條件期望$E(\varphi \mid \mathfrak{B}_t)$亦屬於$\mathscr{H}_n$。
2. 令φ與$E(\varphi \mid \mathfrak{B}_t)$的積分表現核分別爲$F(u_1, u_2, \cdots, u_n)$與$F(u_1, u_2, \cdots, u_n; t)$，則

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n; t) = F(u_1, u_2, \ldots, u_n)\chi_{(-\infty, t]^n}(u_1, u_2, \ldots, u_n). \tag{4.44}$$

【註解】 在(1)中，即使φ是有聊的情形，隨機變數$E(\varphi \mid \mathfrak{B}_t)$也可能等於 0（即$\mathscr{H}_n$中的零元）。

【證明】 (1)幾乎是顯然的。我們證明(2)如下：因爲條件期望$E(\varphi \mid \mathfrak{B}_t)$爲$\varphi$到空間$L_t^2$的直交投影，故由命題 4.5 知，若對某$j$，$u_j > t$，則$F(u_1, u_2, \cdots, u_n; t) = 0$，進一步，若$\psi \in L_t^2$，則

$$\int \varphi(x)\overline{\psi(x)}\, d\mu(x) = \int E(\varphi \mid \mathfrak{B}_t)(x)\overline{\psi}(x)\, d\mu(x).$$

今讓ψ在空間$L_t^2 \cap \mathscr{H}_n$中變動，並利用積分表現，得到

$$\int_{-\infty}^{t} \cdots \int_{-\infty}^{t} F(u_1, u_2, \ldots, u_n)\overline{G(u_1, u_2, \ldots, u_n)}\, du_1\, du_2 \cdots du_n$$
$$= \int_{-\infty}^{t} \cdots \int_{-\infty}^{t} F(u_1, u_2, \ldots, u_n; t)\overline{G(u_1, u_2, \ldots, u_n)}\, du_1\, du_2 \cdots du_n,$$

其中G在整個空間$\hat{L}^2((-\infty, t]^n)$中變動。因此$F(u_1, u_2, \cdots, u_n; t)$等於$F(u_1, u_2, \cdots, u_n)$之局限到$(-\infty, t]^n$，這就證明了(

4.44）。 #

今考慮機率空間（$\mathscr{S}^*$，$\mathfrak{B}$，μ）上的隨機過程 $\{X(t,x): -\infty<t<\infty\}$ 滿足

$$X(t,x)\in(L^2),\quad \forall t. \tag{4.45}$$

【定理 4.6】

設 $\{X(t,x),\mathfrak{B}_t: -\infty<t<\infty\}$ 爲平均值是 0 的平賭過程，並且 $X(t,x)$ 滿足（4.45）。如果 $X(t,x)$ 到 $\mathscr{K}_n$ 的投影記爲 $X_n(t,x)$，則

1. 對每個 $n(>0)$，$\{X_n(t,x),\mathfrak{B}_t: -\infty<t<\infty\}$ 爲一個純粹非定命的平賭過程，並且
2. 存在一個對稱函數 $F_n(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 使得 $X_n(t,x)$ 的積分表現核可以表成下形：

$$F_n(u_1,u_2,\ldots,u_n)\chi_{(-\infty,t]^n}(u_1,u_2,\ldots,u_n). \tag{4.46}$$

【證明】

1. 由 $\{X(t)\}$ 爲平賭過程的一個假設告訴我們 $X(t,x)$ 是 $\mathfrak{B}_t$ 可測的，再加上（4.45），就得到

$$X(t,x)\in L_t^2,\ \forall t.$$

因爲 $P\{X(t)\}\equiv 0$，我們看出 $X(t,x)$ 恆直交於 $\bigcap_t L_t^2=\{1\}$，故 $\{X(t)\}$，從而 $\{X_n(t)\}$，爲純粹非定命。如果我們用投影到 $\mathscr{K}_n$ 的投影算子 P_n 作用到

$$E(X(t)\,|\,\mathfrak{B}_s)=X(s),\qquad t>s,$$

就得到

$$P_nE(X(t)\,|\,\mathfrak{B}_s)=X_n(s).$$

因爲對每個 k，$E(X_k(t)\,|\,\mathfrak{B}_s)\in\mathscr{K}_k$。（命題 4.7，(1)）故上一

等式之左項可表成下形

$$P_n \sum_{k=1}^{\infty} E(X_k(t) | \mathfrak{B}_s)$$

而這正好等於 $E(X_n(t) | \mathfrak{B}_s)$ 。因此我們有

$$E(X_n(t) | \mathfrak{B}_s) = X_n(s), \qquad s < t,$$

從而 $\{X_n(t, x), \mathfrak{B}_t : -\infty < t < \infty\}$ 爲一個平賭過程。

2. 取一個 n 並且固定下來，令 $F_n(u_1, u_2, \cdots, u_n; t)$ 爲 $X_n(t)$ 的積分表現核。由命題 4.7 (2)與 $E(X_n(t) | \mathfrak{B}_s) = X_n(s)$ ， $t > s$ ，之關係式得到

$$F_n(u_1, u_2, \ldots, u_n; t)\chi_{(-\infty, s]^n}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = F_n(u_1, u_2, \ldots, u_n; s), \qquad t > s.$$

換言之，對於 $t > s$ ， $F_n(u_1, u_2, \cdots, u_n; s)$ 等於函數 $F_n(u_1, u_2, \cdots, u_n; t)$ 之局限到 $(-\infty, s]^n$ 上。因此我們可令 $t \to \infty$ ，並且歸納地定義一個對稱函數 $F_n(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 使得 $F_n(u_1, u_2, \cdots, u_n; t)$ 形如(4.46)。 #

【註解】 (a) 由定理 4.6，(2)所定出的函數 F_n 不恒在 $\hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ 之中；參見下面之例 3 。

(b) 即使當 t 只在 $[0, \infty)$ 或有限區間上變動，也可證得一個類似的結果。

【例 3 】

設 t 在 $[0, \infty)$ 中變動且 $\{W(t, x) : t \in [0, \infty)\}$ 爲一個Wiener過程。我們記

$$Y(t, x) = \exp\left[W(t, x) - \frac{1}{2}t\right]. \tag{4.47}$$

則得到一個平賭過程 $\{Y(t, x), \mathfrak{B}_t : t \in [0, \infty)\}$ ，其中 $\mathfrak{B}_t = \{W(u, x) : 0 \leq n < t\}$ 。如果我們將 $Y(t, x)$ 看作是Hermite多項式

序列的生成母函數；則有

$$Y(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(W(t,x);t),$$

故 $H_n(W(t,x);t)$ 爲定理 4.6 中的 $X_n(t,x)$ 之特例。在下一節我們將證明其積分表現核爲 $(n!)^{-1}\chi_{[0,t]^n}(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，從而定理 4.6，(2)的函數 F_n 爲

$$F_n(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\frac{1}{n!}.$$

因爲 F_n 爲一個常函數，故顯然不屬於 $\hat{L}^2([0,\infty)^n)$。

4-5　隨機積分

多重Wiener 積分告訴我們，$\mathscr{H}_n$ 的元素可以看作是 (L^2) 的元素，並且可以表成對 Wiener 過程的 n 重積分。爲了了解這個事實，我們簡述一些必備的基本知識。

對任意固定的 $\xi\in\mathscr{S}$，將 $<x,\xi>$ 看作是 $x\in\mathscr{S}^*$ 的函數時，就是 (L^2) 的一個元素，其範數 $\|<x,\xi>\|_{(L^2)}=\|\xi\|$，後者爲 ξ 的 $L^2(\mathbf{R})$ 範數。如果在 $L^2(\mathbf{R})$ 中有如下的極限：

$$\xi_n\to\chi_{[0,t]}\quad 當\quad n\to\infty,\qquad \xi_n\in\mathscr{S},$$

則我們有

$$\|\langle x,\xi_n\rangle-\langle x,\xi_m\rangle\|_{(L^2)}=\|\xi_n-\xi_m\|_{L^2(\mathbf{R})}\to 0$$

當 $m,n\to\infty$。因此序列 $\{<x,\xi_n>:n\geq 1\}$ 在 (L^2) 中有極限並且此極限跟逼近於 $\chi_{[0,t]}$ 的序列 $\{\xi_n\}$ 之取法無關。序列 $<x,\xi_n>$ 在 (L^2) 範數之下的均方極限當然是 t，這 t 是 $\chi_{[0,t]}$ 的 $L^2(\mathbf{R})$ 範數，爲了簡便起見，我們記此極限爲 $<x,\chi_{[0,t]}>$。它是 $(\mathscr{S}^*,\mathfrak{B},\mu)$ 上的一個Gauss 隨機變數，平均值爲 0 且變異數爲 t。於是 $\{<x,\chi_{[0,t]}>:t\geq 0\}$ 爲一個 Gauss 過程，具有平均值爲 0 及協變異函數 $t\wedge s$，亦即爲一個 Wiener

過程。

對於一般元素 $f \in L^2(\mathbf{R})$，隨機變數 $\langle x, f \rangle$ 同理可定義爲 $(\mathscr{S}^*, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的一個Gauss隨機變數，具有平均値 0 與變異數 $\|f\|^2$。復次，$\langle x, f \rangle$ 屬於 $\mathscr{H}_1$。今隨機變數 $\langle x, \chi_\Delta \rangle$，$\Delta = (a, b]$，可以看作是 Wiener 過程的增分，亦即 $\langle x, \chi_\Delta \rangle = \Delta W$，其中 $\langle x, \chi_{(0,t]} \rangle = W(t)$。有此表式在心中，則隨機變數 $\langle x, f \rangle$ 可以解釋爲

$$\int f(u)\, dW(u). \tag{4.48}$$

然而由定理 2.4 知，對於殆遍的 x，$W(t, x)$ 在任何時間區間上具有無界變差，故上式積分不具通常意義。N. Wiener（1958 第一講）採用泛函分析的辦法克服了這個困難，定義相對於 $dW(t, \omega)$ 的積分，今日叫做 Wiener 積分。他的技巧是先假設導函數 f' 屬於 $L^2([0, 1])$，並且利用分部積分公式

$$\int_0^1 f(u)\, dW(u, \omega) = f(1)W(1, \omega) - \int_0^1 f'(u)W(u, \omega)\, du$$

由左項定義右項，此地右項具有通常的意義。再將積分延拓成對 $f \in L^2([0, 1])$ 都有定義。

作了這些觀察，我們將定義下面的隨機積分，

$$\int_0^t f(u, \omega)\, dW(u, \omega). \tag{4.49}$$

其中被積分項 f 一般而言是 u 與 ω 的函數。然後證明如何將任何 (L^2) 的非常數元表成（4.49）之隨機積分，並且進一步，我們將建立所得的積分式與前一節的積分表現之間的關連。

下面我們要對（4.49）式定義K. Itô（1953 c）與 J. L. Doob（1953）意味的隨機積分。爲了簡便起見，我們取時間區間爲 $[0, 1]$。

令 $\{W(t, \omega) : 0 \le t \le 1\}$ 爲定義在機率空間 $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 上的Wiener 過程，並且令 $\mathfrak{B}_s$（或 $\mathbf{B}_s(W)$）爲 $\mathbf{B}$ 的子 σ 環由 $W(t, \omega)$；$t \le s$

，所產生者。再設存在有一族遞增（對 t ）的 σ 類 $\{A_t : t \in [0, 1]\}$ 使得對任意 $t \in [0, 1]$，我們有

(A.1) $A_t \supseteq \mathfrak{B}_t$；
(A.2) A_t 與 $\{W(t+s)-W(t) : s \geq 0\}$ 是獨立的；

並且被積分項 $f(t, \omega)$ 滿足：

(f.1) $f(t, \omega)$ 爲 $\mathfrak{B}(\mathbf{R}) \times \mathbf{B}$ 可測；
(f.2) $f(t, \cdot)$ 爲 $\mathbf{A}$ 可測；
(f.3) $\int_0^t f(u, \omega)^2 du < \infty$，殆遍。

對於上述的 f 及 $\{A_t\}$，(4.49)之積分可以按下列步驟來定義：

(i) 我們先對 f 爲 t 的簡單函數之情形來定義(4.49)。令 $\{\Delta_K\}$，$\Delta_K = [c_K, c_{K+1})$，爲 $[0, 1]$ 的一個有限分割，其中 $c_0 = 0 < c_1 < c_2 < \cdots \leq 1$，設 f 可表成下形

$$f(t, \omega) = \sum_k A_k(\omega)\chi_{\Delta_k}(t), \tag{4.50}$$

其中 $A_K(\omega)$ 爲 $\mathbf{A}_{c_K}$ 可測。然則，我們定義

$$\int_0^t f(u, \omega)\, dW(u, \omega) = \sum_{c_k < t} A_k(\omega)\, \Delta_k B(\omega) + A_l(\omega)[W(t, \omega) - W(c_l, \omega)], \tag{4.51}$$

$$\text{其中} \quad c_l \leq t < c_{l+1}.$$

我們作一些註解，首先，f 之表成(4.50)式有許多不同的表法，但是

(a) (4.51)之積分跟 f 的表法無關；

(b) 積分對 f 具有加性：如果 f_1 與 f_2 爲形如(4.50)之簡單函數，則對任意常數 λ_1，λ_2，我們有

$$\begin{aligned}\int_0^t &[\lambda_1 f_1(u, \omega) + \lambda_2 f_2(u, \omega)]\, dW(u, \omega) \\ &= \lambda_1 \int_0^t f_1(u, \omega)\, dW(u, \omega) + \lambda_2 \int_0^t f_2(u, \omega)\, dW(u, \omega), \text{殆遍；}\end{aligned} \tag{4.52}$$

(c) 對於這種簡單函數 f，積分

$$\int_0^t f(u,\omega)\,dW(u,\omega)$$

對殆遍 ω，爲 t 的一個連續函數。

這些性質由定義就可直接推得。

(ii) 對於滿足 (f.1)，(f.2) 及 (f.3) 之給定函數 $f(t,\omega)$，我們可以找到適當的序列 $\{f_n\}$ 來逼近 f。事實上，我們可以定義一個 t 之連續函數 f_ε 爲

$$\varepsilon^{-1}\int_{(t-\varepsilon)\vee 0}^{t} f(u,\omega)\,du = f_\varepsilon(t,\omega), \qquad \varepsilon > 0.$$

如果我們令

$$f_{\varepsilon,m}(t) = f_\varepsilon(k2^{-m}), \qquad t \in [k2^{-m}, (k+1)2^{-m}),$$

則得

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\lim_{m\to\infty}\int_0^1 [f(u,\omega) - f_{\varepsilon,m}(u,\omega)]^2\,du = 0, \text{ 殆遍}$$

取一個數列 $\varepsilon_n \to 0$ 與整數列 $m_n \to \infty$ 使得

$$P\left(\int_0^1 [f(u,\omega) - f_{\varepsilon_n,m_n}(u,\omega)]^2\,du > 2^{-n}\right) \le 2^{-n}.$$

令 $f_{\varepsilon_n,m_n} = f_n$。於是利用 Borel-Cantelli 補題得到，對殆遍 ω，存在一個整數 $n(\omega)$ 使得對任意 $n \ge n(\omega)$，我們有

$$\int_0^1 [f(u,\omega) - f_n(u,\omega)]^2\,du \le 2^{-n}. \tag{4.53}$$

序列 f_n 正好是我們所要找尋的。

(iii) 回到 (4.50) 之簡單函數 f，令

$$X(t)=\exp\left[\int_0^t f(u,\omega)\,dW(u,\omega)-\frac{1}{2}\int_0^t f(u,\omega)^2\,du\right]. \tag{4.54}$$

則 $\{X(t), \mathbf{A}_t: 0\leq t\leq 1\}$ 爲一個平賭過程，滿足 $P(X(t))\equiv 1$。我們證明如下：假設 $s<t$，則

$$\int_0^t f(u,\omega)\,dW(u,\omega)=\int_0^s f(u,\omega)\,dW(u,\omega)+A_j(\omega)[W(c_{j+1},\omega)-W(s,\omega)]$$
$$+\sum_{\Delta_k\subseteq[s,t]}A_k(\omega)\,\Delta_k W(\omega)+A_l(\omega)[W(t,\omega)-W(c_l,\omega)],$$

其中 $c_j\leq s<c_{j+1}$，$c_l\leq t\leq c_{l+1}$ 且 $\Delta_k W=W(c_{k+1})-W(c_k)$ 而且

$$\int_0^t f(u,\omega)^2\,du=\int_0^s f(u,\omega)^2\,du+A_j^2(\omega)(c_{j+1}-s)$$
$$+\sum_{\Delta_k\subseteq[s,t]}A_k^2(\omega)|\Delta_k|+A_l^2(\omega)(t-c_l),$$

其中 $|\Delta_k|=c_{k+1}-c_k$ 爲區間 Δ_k 的長度。利用這些公式，我們得到

$$E(X(t)|\mathbf{A}_s)=X(s)E\Bigg\{\exp\Bigg[A_j\{W(c_{j+1})-W(s)\}+\sum_{\Delta_k\subseteq[s,t]}A_k\,\Delta_k W$$
$$+A_l\{W(t)-W(c_l)\}-\frac{1}{2}A_j^2(c_{j+1}-s)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\Delta_k\subseteq[s,t]}A_k^2|\Delta_k|-\frac{1}{2}A_l^2(t-c_l)\Bigg]\Bigg|\mathbf{A}_s\Bigg\}.$$

爲了計算右邊之 $E\{\exp[\cdot]|\mathbf{A}_s\}$ 項，首先我們求得 $E\{\exp[\cdot]|\mathbf{A}_{c_l}\}$，然後逐次求得 $E\{\exp[\cdot]|\mathbf{A}_{c_{l-1}}\}$，…，再利用下列關係式

$$E\{\exp[\cdot]|\mathbf{A}_s\}=E\{\cdots\{E\{\exp[\cdot]|\mathbf{A}_{c_l}\}|\mathbf{A}_{c_{l-1}}\}\cdots|\mathbf{A}_s\}.$$

就好了。因爲 $W(t)-W(c_l)$ 獨立於 $\mathbf{A}_{c_l}$ 並且 A_l 爲 $\mathbf{A}_{c_l}$ 可測，故 $E\{\exp[\cdot]|\mathbf{A}_{c_l}$ 變成

$$\exp\left[A_j\{W(c_{j+1})-W(s)\}+\sum_{\Delta_k\subseteq[s,t]}A_k\,\Delta_k W-\frac{1}{2}A_j^2(c_{j+1}-s)-\frac{1}{2}\sum_{\Delta_k\subseteq[s,t]}A_k^2|\Delta_k|\right].$$

對此式取條件期望 $E\{\cdot\mid \mathbf{A}_{c_{j-1}}\}$，然後再取 $E\{\cdot\mid \mathbf{A}_{c_{j-2}}\}$，… 等等，最後就得到

$$E\left\{\exp\left[A_j(W(c_{j+1})-W(s))-\frac{1}{2}A_j^2(c_{j+1}-s)\right]\Big|A_s\right\}=1.$$

回想一下我們證明過

$$E\{\exp[\cdot]\mid \mathbf{A}_s\}=1,$$

於是我們得到如下的結論

$$E\{X(t)\mid \mathbf{A}_s\}=X(s),\qquad E\{X(t)\}=1.$$

因此，如同第 2.2 節[3]，我們推得不等式

$$P\left(\max_{0\le t\le 1}\left\{\int_0^t f(u,\omega)\,dW(u,\omega)-\frac{a}{2}\int_0^t f(u,\omega)^2\,du\right\}\ge b\right)\le e^{-ab},\tag{4.55}$$

(iv) 假設 $\{f_n\}$ 爲如［2］中所述之簡單函數列，則對於任意 $n>n(\omega)$，我們有不等式

$$\int_0^1\{f_n(u,\omega)-f_{n-1}(u,\omega)\}^2\,du\le 4\cdot 2^{-n}.$$

取 $a=(2^{n-1}\log n)^{1/2}$ 與 $b=c(2^{-n+1}\log n)^{1/2}$，其中 $c>1$，我們應用不等式（4.55）到 $g_n=f_n-f_{n-1}$ 得到

$$P\left(\max_{0\le t\le 1}\left\{\int_0^t g_n(u,\omega)\,dW(u,\omega)-\tfrac{1}{2}(2^{n-1}\log n)^{1/2}\int_0^t g_n(u,\omega)^2\,du\right\}\right.$$
$$\left.\ge c(2^{-n+1}\log n)^{1/2}\right)\le n^{-c}.$$

再由 Borel-Cantelli 補題得知，存在一個整數 $n_0(\omega)>n(\omega)$ 使得對任何 $n>n_0(\omega)$ 我們有不等式

$$\max_{0\le t\le 1}\int_0^t g_n(u,\omega)\,dW(u,\omega)\le\frac{1}{2}a\int_0^1 g_n(u,\omega)^2\,du+b$$
$$\le(1+c)(2^{-n+1}\log n)^{1/2}.$$

如果將 g_n 改成 $-g_n$，同樣的不等式亦成立，因此

$$\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^t\{f_n(u,\omega)-f_{n-1}(u,\omega)\}\,dW(u,\omega)\right|\le(1+c)(2^{-n+1}\log n)^{1/2}\tag{4.56}$$

對足夠大的 n 均成立。這個不等式保證下面極限的存在：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t f_n(u,\omega)\,dW(u,\omega)=\int_0^t f(u,\omega)\,dW(u,\omega),\qquad\text{a.e.}\tag{4.57}$$

復次，這個收斂對 t 是均勻的，而且由（4.56）之不等式也很容易看出（4.57）之極限與逼近於 f 之序列的求法無關。

討論至此，我們已經很明白，隨機積分 $\int_0^t f(u,\omega)dW(u,\omega)$ 就定義成（4.57）式之左項。我們再作一小註：如果我們對時軸 $[0,\infty)$ 有興趣，則被積分項 f 的條件（f.3）應改成

(f.3′) $$\int_0^t f(u,\omega)^2\,du<\infty,\qquad\text{a.e. }\forall\quad t<\infty.$$

於是積分

$$\int_0^t f(u,\omega)\,dW(u,\omega),\qquad t\ge 0,$$

如上述皆有意義。當然啦，如果我們要求更強的條件

$$\int_0^\infty f(u,\omega)^2\,du<\infty,\qquad\text{a.e.}$$

則毫無困難地我們可以定義隨機積分

$$\int_0^\infty f(u,\omega)\,dW(u,\omega).$$

有關隨機積分的一些重要性質，我們把它們列在下面命題。所有的證明都省略，有興趣的讀者可參看 J. L. Doob (1953) 或 H. P. Mckean Jr. (1969)。

【命題 4.8 】

設 f ，f_1 與 f_2 滿足 (f.1) ，(f.2) 與 (f.3′) 之條件，則下列斷言皆成立：

1. 對於常數 λ_1，λ_2 我們有

$$\int_0^t \{\lambda_1 f_1(u,\omega)+\lambda_2 f_2(u,\omega)\}\,dW(u,\omega)$$
$$=\lambda_1\int_0^t f_1(u,\omega)\,dW(u,\omega)+\lambda_2\int_0^t f_2(u,\omega)\,dW(u,\omega).$$

2. 對殆遍 ω 而言積分

$$\int_0^t f(u,\omega)\,dW(u,\omega)$$

對 t 是連續的。

3.
$$E\left[\left|\int_0^\infty f(u,\omega)\,dW(u,\omega)\right|^2\right]\le E\left[\int_0^\infty f(u,\omega)^2\,du\right],$$

並且若右項是有限的，則

$$E\left[\int_0^\infty f(u,\omega)\,dW(u,\omega)\right]=0$$

且

$$E\left[\left|\int_0^\infty f(u,\omega)\,dW(u,\omega)\right|^2\right]=E\left[\int_0^\infty f(u,\omega)^2\,du\right].$$

【註解】 對於一般（即不一定是簡單）函數 f ，令

$$X(t, \omega) = \exp\left[\int_0^t f(u, \omega)\, dW(u, \omega) - \frac{1}{2}\int_0^t f(u, \omega)^2\, du\right].$$

則 $\{X(t), \mathbf{A}_t : t \geq 0\}$ 爲一勝賭，亦即對於 $s < t$ ，

$$E\{X(t) | \mathbf{A}_s\} \leq X(s), \qquad \text{a.e.}$$

我們也有

$$E\{X(t)\} \leq 1,$$

並且存在有一個例子使得 $E\{X(t)\} < 1$ 。

【例1】

設 $F(t, u)$ 爲 (u, t) 之非隨機函數，並且對任意 t ，F 對 u 於 $[0, t]$ 上是平方可積的，則隨機積分

$$X(t, \omega) = \int_0^t F(t, u)\, dW(u, \omega), \qquad t \geq 0, \tag{4.58}$$

可以定義，這是 F 爲定命的特例。於是得到 $\{X(t, \omega) : t \geq 0\}$ 爲一個 Gauss 過程。

特別地，若 F 只是 u 的函數，記成 $F(u)$ ，則

$$X(t, \omega) = \int_0^t F(u)\, dW(u, \omega), \qquad t \geq 0, \tag{4.59}$$

定義了一個加法過程，並且對殆遍的樣本路徑是連續的。進一步，考慮特例 $F(u) \equiv 1$ ，則 $X(t, \omega) = W(t, \omega)$ ，$t \geq 0$ ，亦即

$$W(t, \omega) = \int_0^t 1\, dW(u, \omega). \tag{4.60}$$

有關被積分項爲定命的情形，隨機積分（4.58）還有另一種定義方法

。對於固定的 t ，我們將被積分項 F 看作只是 u 的函數。如果此函數爲簡單函數，不妨設 f 給如（4.50），於是隨機積分定義爲（4.51）。今取一列簡單函數列逼近到 F ，我們發現相應的隨機積分所成的序列，在 $L^2(\Omega, B, P)$ 中存在有極限。這樣得到的隨機變數跟 t 有關，記爲

$$X(t) = \int_0^t F(t, u)\, dW(u), \qquad t \geq 0,$$

在此我們省略參數 ω 。於是 $\{X(t): t \geq 0\}$ 爲（4.58）所定義的Gauss過程 $\{X(t, \omega): t \geq 0\}$ 之一樣板（version）。上一節所述的過程 $X_1(t)$ 可看作是已由上述方法所定義。

【例 2】

下面的等式成立：

$$\int_0^t W(u, \omega)\, dW(u, \omega) = \frac{1}{2} W(t, \omega)^2 - \frac{1}{2} t \equiv H_2(W(t, \omega), t), \qquad 0 \leq t \leq 1. \quad (4.61)$$

爲了證明這個結果，我們取一個序列 $\{W_n(u): n \geq 1\}$ 來逼近 $W(u)$ ：

$$W_n(u, \omega) = W(k2^{-n}, \omega), \qquad u \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}).$$

如果 $t \in [l2^{-n}, (l+1)2^{-n})$ ，由定義我們得

$$\begin{aligned}
\int_0^t W_n(u, \omega)\, dW(u, \omega) &= \sum_{k=0}^{l-1} W(k2^{-n}, \omega)\{W((k+1)2^{-n}, \omega) - W(k2^{-n}, \omega)\} \\
&\quad + W(l2^{-n}, \omega)\{W(t, \omega) - W(l2^{-n}, \omega)\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_0^{l-1} W((k+1)2^{-n}, \omega)^2 - \sum_0^{l-1} W(k2^{-n}, \omega)^2 \right. \\
&\qquad \left. - \sum_0^{l-1} \{W((k+1)2^{-n}, \omega) - W(k2^{-n}, \omega)\}^2\right] \\
&\quad + W(l2^{-n}, \omega)\{W(t, \omega) - W(l2^{-n}, \omega)\} \\
&= \frac{1}{2} W(t, \omega)^2 - \frac{1}{2} \sum_0^{l-1} \{\Delta_k W(\omega)\}^2
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\{W(l2^{-n},\omega)^2-W(t,\omega)^2\}$$

$$+W(l2^{-n},\omega)\{W(t,\omega)-W(l2^{-n},\omega)\},$$

其中 $\Delta_k=[\,k2^{-n}\,,(k+1)2^{-n})$ 。今令 $n\to\infty$ 且 $[\,l2^{-n}\,,(l+1)2^{-n})$ 仍然爲含 t 的區間。於是 $W(l2^{-n})\to W(t)$，並且由第 2.2 節之定理 2.3 可知，上面最後表式對殆遍的 ω 趨近於 ½ $(W(t)^2-t)$。故（4.61）的第一等式就得證了，而第二個等式利用 $H_2(x;\sigma^2)$ 的定義就好了。

順便地，如果我們利用（4.60）式，則（4.61）式的左項可以改寫成

$$\int_0^t\left\{\int_0^u dW(s,\omega)\right\}dW(u,\omega)=\int_0^t\int_0^u dW(s,\omega)\,dW(u,\omega),$$

有時這又寫成

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t dW(s,\omega)\,dW(u,\omega),$$

大致上可稱爲多重Wiener 積分（此地是雙重的）

【註】 我們不能使用形式的Fubini 定理來推導，比如

$$\frac{1}{2}\int_0^t\left\{\int_0^t dW(s,\omega)\right\}dW(u,\omega)=\frac{1}{2}W(t)^2.$$

我們也要記住條件（f.2）對隨機積分的定義是必要的關鍵。

如上面的［註］所顯示，對於隨機積分而言，Fubini定理不恆成立。然而，在某些條件下，我們可以定義相對於 dW 的重積分。

以下爲了簡便起見，我們假設時間區間爲［0，1］。選取一個滿足（f.1），（f.2）與（f.3）的函數 f，定義隨機積分

$$f_1(u,\omega)=\int_0^u f(s,\omega)\,dW(s,\omega).$$

由積分的定義很容易知道

1. f_1為(u, ω)可測；事實上
2. $f_1(u, \cdot)$為$\mathbf{A}_u$可測，$\forall u$；且
3. 對殆遍w，$f_1(\cdot, \omega)$連續。

由最後這條性質，可知對殆遍ω，f_1是有界的，並且

$$\int_0^1 \{f_1(u, \omega) f(u, \omega)\}^2 \, dW(u, \omega) \leq \max_{0 \leq u \leq 1} |f_1(u, \omega)|^2 \cdot \int_0^1 f(u, \omega)^2 \, du < \infty.$$

因此由(1)，(2)，(3)可知乘積$f_1(u) f(u)$滿足上述的(f.1)，(f.2)與(f.3)，所以可以定義隨機積分

$$f_2(t, \omega) = \int_0^t f_1(u, \omega) f(u, \omega) \, dW(u, \omega). \tag{4.62}$$

這又可表成

$$f_2(t, \omega) = \int_0^t \int_0^u f(u_1, \omega) f(u, \omega) \, dW(u_1, \omega) \, dW(u, \omega). \tag{4.63}$$

我們可以歸納地定義f_n：

$$f_n(t, \omega) = \int_0^t f_{n-1}(u, \omega) f(u, \omega) \, dW(u, \omega) \tag{4.64}$$

並且改寫成

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_{n-1}} & f(u_1, \omega) f(u_2, \omega) \cdots f(u_n, \omega) \\ & \times dW(u_1, \omega) \, dW(u_2, \omega) \cdots dW(u_n, \omega). \end{aligned} \tag{4.65}$$

上面的積分可以推廣到被積分項是一些相異函數之乘積的情形，但每個函數滿足必要的條件。

以後我們經常會遇到一些簡單而有趣的例子，其被積分項$f(u)$與ω無關，記成$F(u)$。更特殊的情形，讓我們考慮$F(u) = 1$，於是有

$$f_n(t, \omega) = \int_0^t \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_{n-1}} dW(u_1, \omega) \cdots dW(u_n, \omega). \tag{4.66}$$

如果我們取 $\mathbf{A}_t$ 為 $\mathbf{B}_t(=\mathbf{B}_t(W))$ 並且令

$$Y(t, \omega) = \exp\left[W(t) - \frac{1}{2}t\right], \tag{4.67}$$

則如剛才已證明過，$\{Y(t), \mathbf{B}_t : t \in [0, 1]\}$ 為一平賭過程。今我們可敍述出下面的結果。

【定理 4.7】

設 $\{Y(t) ; t \in [0, 1]\}$ 為（4.67）所定義的隨機過程，則下述關係成立：

$$\int_0^t Y(u, \omega)\, dW(u, \omega) = Y(t, \omega) - 1, \qquad \text{a.e.}, \tag{4.68}$$

且

$$\int_0^t H_n(W(u, \omega); u)\, dW(u, \omega) = H_{n+1}(W(t, \omega); t), \qquad \text{a.e.}, \tag{4.69}$$

其中最後一表式等於（4.66）所定義的 $f_{n+1}(t)$。

在給出這個定理的證明之前，我們先給出相關的預備。我們將取基本的 Wiener 過程為定義在機率空間（$\mathscr{S}^*$，$\mathfrak{B}$，μ）上的 $\{\langle x, \chi_{[0,t]}\rangle : t \in [0, 1]\}$，並且為了簡便起見，我們要假設樣本路徑皆連續。今我們引入一些記號。對於一個實數 λ，令 $E^{(k)}(\lambda)$ 為作用在 $\hat{L}^2(\mathbf{R}^k)$ 上的算子，定義為

$$E^{(k)}(\lambda)f(x) = \chi_{(-\infty, \lambda]^k}(x) f(x), \qquad f \in \hat{L}^2(\mathbf{R}^k)$$

這是一個射影算子，並且

$$\{E^{(k)}(\lambda) : -\infty < \lambda < \infty\}$$

爲$\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$上的單位映射I的么之分割。

對於$f\in\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$與$g\in L^2(\mathbf{R})$，我們利用$E^{(n)}(\lambda)$與$E^{(1)}(\lambda)$定義乘積$f\rhd g$如下：若$x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n\leq y$，則

$$(f\rhd g)(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\{E^{(n)}(\lambda)f\otimes dE^{(1)}(\lambda)g\}(x,y) \tag{4.70}$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\otimes$表張量積，並且對於$d\lambda>0$我們有

$$dE^{(1)}(\lambda)=E^{(1)}(\lambda+d\lambda)-E^{(1)}(\lambda).$$

這個乘積可以利用對稱性延拓到整個空間$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^{n+1}$，並且仍記爲$f\rhd g$。當我們定義乘積時，我們由領域$x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n$出發，但是$f$爲$\mathbf{R}^n$上的對稱函數，故對某些$x_i$作置換，並不影響。因此乘積$f\rhd g$是有意義的，並且對$f$與$g$顯然是雙線性的。

【註】 當$\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$改成$\hat{L}^2(T^n)$時，乘積$\rhd$亦可類似地定義，其中T爲$\mathbf{R}$的有限或無限子區間。

【例3】

對於$n=1$的情形，我們有

$$(f\rhd g)(x,y)=f(x\wedge y)g(x\vee y). \tag{4.71}$$

【例4】

若$f=\chi_{(0,t)^n}\,[\in\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)]$且$g=\chi_{(0,t)}\,[\in L^2(\mathbf{R})]$，則

$$(f\rhd g)(x,y)=\chi_{(0,t)^{n+1}}(x,y),\qquad x\in\mathbf{R}^n,\qquad y\in\mathbf{R}. \tag{4.72}$$

如果用$\chi_{(0,s)^n}$取代$f=\chi_{(0,t)^n}$，其中$s>t$，則結果$f\rhd g$仍然跟先前相同，即爲$\chi_{(0,t)^{n+1}}$。

下面的補題建立在機率空間$(\mathscr{S}^*,\mathfrak{B},\mu)$上，$(\mathscr{L}^*,\mathfrak{B},\mu)$暫時固定下來，並且用記號$x$而不用$\omega$。令

$$\langle x,\chi_{(0,t)}\rangle=W(t,x),\qquad t\geq 0,$$

就得到一個Wiener過程。其它的記號如前，時軸取爲$[0, 1]$。

【補題 4.1】

設$\{f(t, x), \mathfrak{B}_t : t \in [0, 1]\}$爲一個平賭過程，且$f(u, x)$爲$\mathscr{H}_n$的一個元素滿足(f.1)，(f.2)與(f.3)的條件。再設$F_u(s_1, s_2, \cdots s_n)$爲$f(u, x)$的積分表現核，且$g(u)$爲$L^2([0, 1])$中的一個定命函數。然則，

$$\int_0^1 f(u, x) g(u)\, dW(u, x) \tag{4.73}$$

屬於$\mathscr{H}_{n+1}$，並且積分表現核爲

$$(n+1)^{-1} F_1 \rhd g$$

【證明】 隨機積分(4.73)可由近似和

$$\sum_k f(u_k, x) g(u_k) \langle x, \chi_{\Delta_k} \rangle, \qquad \Delta_k = [u_k, u_{k+1}).$$

來逼近。今用$\mathscr{T}$[第4.3節公式(4.12)]來作用此式，得到

$$\int_{\mathscr{S}^*} e^{i\langle x, \xi \rangle} \sum_k f(u_k, x) g(u_k) \langle x, \chi_{\Delta_k} \rangle\, d\mu(x) \qquad (\xi \in \mathscr{S})$$

$$= \sum_k \int_{\mathscr{S}^*} \{e^{i\langle x, \xi_k^+ \rangle} \langle x, g(u_k) \chi_{\Delta_k} \rangle\} \{e^{i\langle x, \xi_k^- \rangle} f(u_k, x)\}\, d\mu(x),$$

其中$\xi_k^+(u) = \xi(u) \chi_{[u_k, \infty)}$，且$\xi_k^-(u) = \xi(u) - \xi_k^+(u)$。

和式中的每一項都是大括號中的兩個獨立隨機變數之乘積，因此上式

$$= \sum_k i \langle g(u_k) \chi_{\Delta_k}, \xi_k^+ \rangle \exp\left[-\frac{1}{2} \|\xi_k^+\|^2\right]$$

$$\times i^n \int \cdots \int_{[0,1]^n} F_{u_k}(s_1, \ldots, s_n) \xi_k^-(s_1) \cdots \xi_k^-(s_n)\, ds_1 \cdots ds_n \exp\left[-\frac{1}{2} \|\xi_k^-\|^2\right].$$

因爲$\{f(u, x), \mathfrak{B}_t : t \in [0, 1]\}$爲一個平賭過程，定理4.6告訴我

們

$$F_u(s_1, \ldots, s_n) = F_1(s_1, \ldots, s_n)\chi_{[0, u]^n}(s_1, \ldots, s_n), \qquad 0 \le u \le 1,$$

從而上面積分之和

$$= C(\xi) i^{n+1} \sum_k \int_{[0,1]^{n+1}} \cdots \int g(u_k)\chi_{\Delta_k}(s_0) F_1(s_1, \ldots, s_n)\chi_{[0, u_k]^n}(s_1, \ldots, s_n)$$
$$\times \xi(s_0)\xi(s_1) \cdots \xi(s_n)\, ds_0\, ds_1 \cdots ds_n.$$

今由 $\rhd$ 的定義可知，這個和收斂到

$$i^{n+1} C(\xi) \int \cdots \int (n+1)^{-1} (F_1 \rhd g)(s_0, s_1, \ldots, s_n)$$
$$\times \xi(s_0)\xi(s_1) \cdots \xi(s_n)\, ds_0\, ds_1 \cdots ds_n.$$

因此我們已證明了，隨機積分（4.73）確實屬於 $\mathscr{H}_{n+1}$，並且其積分表現核爲 $(n+1)^{-1} F_1 \rhd g$。 #

【定理4.7之證明】 我們的機率空間仍然爲 $(\mathscr{S}^*, \mathfrak{B}, \mu)$。

1. 對於實數 λ，令 $Y_\lambda(t, x) = \exp[\lambda W(t, x) - \frac{1}{2}\lambda^2 t]$。我們已知 $\{Y_\lambda(t; x), \mathfrak{B}_t : t \in [0, 1]\}$ 爲一個平賭過程，故對於 $s < t$，我們有

$$E(Y_\lambda(t, x) | \mathfrak{B}_s) = Y_\lambda(s, x), \qquad \text{a.e.}$$

我們發現 $Y_\lambda(t)$ 爲具參數之 Hermite 多項式序列之生成函數，故可展成 λ 的冪級數。平賭等式於是成爲

$$\sum_n \lambda^n E(H_n(W(t, x); t) | \mathfrak{B}_s) = \sum_n \lambda^n H_n(W(s, x); s),$$

比較 λ^n 的係數，得到

$$E(H_n(W(t, x); t) | \mathfrak{B}_s) = H_n(W(s, x); s), \qquad \text{a.e.,}$$

亦即對每個 n，$\{H_n(W(t, x); t), \mathfrak{B}_t : t \in [0, t]\}$ 爲一個平賭過程。

2. 下一步是要獲得$H_n(W(t,x);t)$的積分表現。如（4.16）的情形，我們有

$$(\mathscr{F}Y_\lambda(t))(\xi)=C(\xi)\exp\left[i\lambda\int\chi_{[0,t]}(u)\xi(u)\,du\right],$$

並且再次視$Y_\lambda(t)$為一生成函數，對右項作冪級數展開。這就證明了：對於$n\geq 0$，

$$(\mathscr{F}H_n(B(t,x);t))(\xi)=C(\xi)\frac{i^n}{n!}\left\{\int\chi_{[0,t]}(u)\xi(u)\,du\right\}^n,$$

這就證明了：$H_n(W(t,x);t)$的積分表現核為$(1/n!)\chi_{[0,t]^n}$。

3. 現在我們要來利用剛才證明的補題。對於任意n，泛函$H_n(W(t,x);t)$為$\mathscr{H}_n$中的元素，滿足補題4.1的條件，唯一不同的是此地我們取$[0,t]$而不是$[0,1]$。因此隨機積分

$$\int_0^t H_n(W(u,x);u)\,dW(u,x) \tag{4.74}$$

可以定義，並且$\mathscr{H}_{n+1}$中的元素。由例4知，它的積分表現核為

$$(n+1)^{-1}(n!)^{-1}\chi_{[0,t]^n}\mathbin{\hat{\otimes}}\chi_{[0,t]}=\{(n+1)!\}^{-1}\chi_{[0,t]^{n+1}}.$$

回想一下，因為$\mathscr{H}_{n+1}$與$\hat{L}^2(\mathbf{R}^{n+1})$在$\mathscr{T}$之下是同構的，差個常數$(n!)^{-1/2}$，我們看出（4.74）之積分必等於（$L^2$）泛函$H_{n+1}(W(t,x);t)$，而後者具有積分表現核為$\{(n+1)!\}^{-1}\chi_{[0,t]^{n+1}}$。實際上我們已證明了（4.69）對所有$t$皆成立（更精確地說：對殆遍$\omega$（4.69）的右項對$t$是連續的，因此等號對所有$t$皆成立，除了一個$\omega$之零測集外）。

把這個結果對$n=0,1,2,\cdots$作和，再利用Hermite多項式的生成函數，我們就得到（4.68）之等式。 #

【註】 上述的例2是公式（4.69）之特例。

再回到定理 4.7 的證明中之展式 $Y_\lambda(t, x) = \exp[\lambda W(t, x) - \frac{1}{2}\lambda^2 t] = \Sigma_0^\infty \lambda^n H_n(W(t, x); t)$。我們可以對 dW 作逐項積分，而得到

$$\int_0^t Y_\lambda(u, x)\, dW(u, x) = \lambda^{-1}[Y_\lambda(t, x) - 1]. \tag{4.75}$$

今稍變更 $Y_\lambda(t, x)$ 的定義爲 $Y_\lambda(t, x) = \exp[\lambda\{W(t+a, x) - W(a, x)\} - \frac{1}{2}\lambda^2 t]$。這樣做 (4.75) 仍然成立，於是定理 4.7 可以很容易推廣。取 $f \in L^2([0, 1])$ 且令

$$X(t, x) = \int_0^t f(u)\, dW(u, x). \tag{4.76}$$

Wiener 積分 $X(t, x)$ 也可記成 $\langle x, f \rangle$。如果我們引入記號

$$\|f\|_t^2 = \int_0^t f(u)^2\, du$$

並且令

$$Y(t, x) = \exp\left[X(t, x) - \frac{1}{2}\|f\|_t^2\right]. \tag{4.77}$$

則 $\{Y(t, x), \mathfrak{B}_t : t \in [0, 1]\}$ 也是一個平賭過程，並且定理 4.7 推廣如下：

【命題 4.9】

設 $X(t, x)$ 與 $Y(t, x)$ 分別由 (4.76) 與 (4.77) 所定義，則我們有

$$\int_0^t Y(u, x) f(u)\, dW(u, x) = Y(t, x) - 1, \qquad \text{a.e.,} \tag{4.78}$$

與

$$\int_0^t H_n(X(t, x); \|f\|_t^2) f(u)\, dW(u, x) = H_{n+1}(X(t, x); \|f\|_t^2), \qquad \text{a.e.} \tag{4.79}$$

復次，$H_n(X(t, x); \|f\|_t^2)$ 可表成多重積分：

$$H_n(X(t, x); \|f\|_t^2) = \int_0^t \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_{n-1}} f^{n\otimes}(u_1, \ldots, u_n)\, dW(u_1, x) \cdots dW(u_n, x), \qquad (4.80)$$

其中 $f^{n\otimes}(u_1, \cdots, u_n) = f(u_1) \cdots f(u_n)$ 。

因爲這個命題的證明與定理 4.7 相似，故我們省略掉。

在結束本節之前，我們作一些註解。令 $t = 1$ 且考慮（4.80）中的 f 滿足 $\|f\| = 1$ ，則 $\dot{H}_n(\langle x, f\rangle; \|f\|^2)$ 的積分表現核爲 $(n!)^{-1} f^{n\otimes}$ ，這與第 4.4 節一致。

相對於 $dW(u, x)$ 的積分可看作是一個算子，它將 $\mathscr{H}_n$ 的元素映成 $\mathscr{H}_{n+1}$ 的元素。例如在（4.79）的情形，$\mathscr{H}_n$ 中的元素具有 $f^{n\otimes}$ 爲核者，被映成 $\mathscr{H}_{n+1}$ 中的元素具有 $f^{(n+1)\otimes}$ 爲核。採用量子力學的術語來說，這個積分在Fock 空間上［第 4.3 節（4.22）］定義了所謂的創生-消滅算子（creation-annihilation operator），在我們的情形，是創生算子。這個操作對應到第A.5 中（A.35）關於Hermite 多項式的公式。用現在的記號可以寫成

$$\begin{aligned}\langle x, f\rangle H_n(\langle x, f\rangle; \|f\|^2) = (n+1)H_{n+1}(\langle x, f\rangle; \|f\|^2) \\ + \|f\|^2 H_{n-1}(\langle x, f\rangle; \|f\|^2).\end{aligned}$$

4·6 應用例子

這一節我們要用一些例子來說明我們的理論，也給出一些補充的描述。

[1] 二次泛函

兩重Wiener 積分 $\mathscr{H}_2$ 的元素是白噪聲（或Wiener 過程）的二次泛函。這些特殊的非線性泛函有許多有趣的性質，而積分表現理論是要對它們作解析工作的有力工具。

設 $F(u, v)$ 爲實值函數 $\varphi(x) \in \mathscr{H}_2$ 之積分表現，則 F 爲 $\hat{L}^2(\mathbf{R}^2)$ 中的一個實值函數，它在 $L^2(\mathbf{R})$ 上定義了一個Hilbert-Schmidt 型的積分算子。因爲 F 爲實對稱（即 $F(u, v) = F(v, u)$），故此積分算子爲Hermite 型。F 的固有值與么正化固有函數分別記爲 $\{\lambda_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbf{R}$ 與

$\{\eta_n: n\geq 1\}\subseteq L^2(\mathbf{R})$ 。於是 $\|\eta_n\|=1$ ，$\forall n$ ，並且

$$\lambda_n \int F(u, v)\eta_n(v)\, dv = \eta_n(u).$$

由推廣的 Hilbert-Schmidt 展開定理，我們有下面 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 中的展開式：

$$F(u, v) = \sum_1^{\infty} \lambda_n^{-1}\eta_n(u)\eta_n(v), \tag{4.81}$$

其中 $\{\lambda_n\}$ 以絕對值遞增的次序排列，計較重複度，並且 $\Sigma_n \lambda_n^{-2}<\infty$ 。

【定理 4.8】

設 $\varphi(x)$ 爲 $\mathscr{H}_2$ 中的實函數，相應的核爲 F ，則由 F 的展開式（4.81），我們可將 $\varphi(x)$ 表成獨立隨機變數之和

$$\varphi(x) = \sum_1^{\infty} \lambda_n^{-1}(\langle x, \eta_n\rangle^2 - 1), \qquad \text{a.e.} \tag{4.82}$$

隨機變數 $\varphi(x)$ 的 Fourier 特徵函數 $\chi(z)$ 爲

$$\chi(z) = \delta(2iz; F)^{-1/2}, \qquad z\in\mathbf{R}, \tag{4.83}$$

其中 $\delta(\lambda, F)$ 爲 F 的修飾 Fredholm 行列式。

【證明】 變換 $\mathscr{T}$ 建立了 $\mathscr{H}_2$ 的所有積分表現核所成空間 $\hat{L}^2(\mathbf{R}^2)$ 之間的對射。因此 F 的（4.81）展式給出相應的 $\varphi(x)$ 之展式。今已知［見第 4.3 節公式(4.17)］$\mathscr{H}_2$ 泛函具有核 $\eta_n(u)\eta_n(v)$ ，因爲它的積分表現爲 $\langle x, \eta_n\rangle^2-1$ 。於是（4.81）就決定了（4.82）之展開式。因爲 $\{\eta_n\}$ 爲 $L^2(\mathbf{R})$ 中的么正系統，故 $\{\langle x, \eta_n\rangle: n\geq 1\}$ 爲一族獨立的 Gauss 隨機變數，從而 $\{[\langle x, \eta_n\rangle^2-1]: n\geq 1\}$ 亦爲獨立系統。

隨機變數 $\varphi(x)$ 的 Fourier 的特徵也可由（4.82）之展式立即得到。因爲 $\langle x, \eta_n\rangle$ 爲標準 Gauss 隨機變數，故 $\langle x, \eta_n\rangle^2$ 具有一個自由度之 χ 方分佈，於是當 $n\geq 1$ 時，

$$\int_{\mathscr{S}^*} \exp[iz(\langle x, \eta_n\rangle^2 - 1)]\, d\mu(x) = (1 - 2iz)^{-1/2} \exp[-iz], \qquad z \in \mathbf{R}.$$

此式在 $\lambda_n^{-1}z$ 取值，再對 $n \geq 1$ 作乘積，就得到 $\varphi(x)$ 的特徵函數爲

$$\int_{\mathscr{S}^*} \exp[iz\varphi(x)]\, d\mu(x) = \prod_n (1 - 2iz\lambda_n^{-1})^{-1/2} \exp[-iz\lambda_n^{-1}].$$

最後我們看出，利用核 F 的修飾 Fredholm 行列式 $\delta(\lambda, F) = \Pi_n(1 - \lambda_n^{-1}\lambda)\exp[\lambda_n^{-1}\lambda]$，上式右項可以改寫成（4.83）之形。 #

【推論】 設 $\varphi(x)$ 爲定理 4.8 中的 $\mathscr{H}_2$ 泛函，則 $\varphi(x)$ 的各級矩皆存在，且其 p 級累積量（p-th cumulant）γ_p 如下形：

$$\begin{cases} \gamma_1 = 0, \\ \gamma_p = 2^{p-1}(p-1)! \sum_1^{\infty} \lambda_n^{-p}, \qquad p \geq 2. \end{cases} \tag{4.84}$$

【證明】 這個結果牽涉到 $\log \chi(z)$ 之 Taylor 展開。令 σ_p 表示核 F 與 p 重積 $F^p(u, v)$ 之跡（trace），則由 $\delta(\lambda; F)$ 的公式［見 F. Smithies（1958）第 VI 章］

$$\frac{d}{d\lambda} \log \delta(\lambda; F) = -\sum_{p=1}^{\infty} \sigma_p \lambda^p, \qquad |\lambda| \text{ 足夠小，}$$

以及（4.83），可得

$$\begin{aligned} \log \chi(z) &= -\frac{1}{2} \log \delta(2iz; F) \\ &= \frac{1}{2} \sum_2^{\infty} p^{-1} \sigma_p (2iz)^p \\ &= \frac{1}{2} \sum_2^{\infty} 2^p \sigma_p (p-1)! \frac{(iz)^p}{p!}. \end{aligned}$$

另一方面，我們有

$$\sigma_p = \sum_1^{\infty} \lambda_n^{-p}$$

故（4.84）就得證了。 #

高階矩的存在性可由上述結果推得，也可由下面的事實推得：$\{<x, \eta_n>: n \geq 1\}$ 爲獨立系統且當 $p \geq 2$ 時 $\Sigma_n \lambda_n^{-p}$ 收歛。

【註】 $\varphi(x) \in \mathscr{H}_2$ 的分佈完全由其累積量決定，而上述定理給出計算它們的方法。

我們有興趣於特殊情形：$\varphi(x)$ 的積分表現核 $F(u, v)$ 滿足

$$F(-u, -v) = -F(u, v) \qquad (= -F(v, u)). \tag{4.85}$$

N.Wiener（1958）在建構腦波模型時就出現了這個二次泛函。下面命題給出了這種泛函的一個刻劃。

【命題 4.10】

假設實值泛函 $\varphi(x) \in \mathscr{H}_2$ 的積分表現核 $F(u, v)$ 滿足（4.85），則下述成立：

1. 若 λ 爲 F 的固有值，則 $-\lambda$ 亦然。
2. $\varphi(x)$ 的分佈關於原點對稱；且其 Fourier 特徵函數爲

$$\chi(z) = \delta(2iz, F)^{-1/2} = \prod_{\lambda_n > 0} (1 + 4z^2\lambda_n^{-2})^{-1/2}, \qquad z \in \mathbf{R}, \tag{4.86}$$

其中 $\pm\lambda_n$，$n \geq 1$，爲 F 的固有值。

3. $\varphi(x)$ 的累積量爲

$$\begin{cases} \gamma_{2p+1} = 0, \\ \gamma_{2p} = 2^{2p}(2p-1)! \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-2p}, \qquad p \geq 1. \end{cases} \tag{4.87}$$

上述命題的證明都是直接的，故省略掉。

今考慮一般的實值泛函 $\varphi(x) \in \mathscr{H}_2$，因爲在應用上常出現的有意義例

子形如 $X(t, x) = \varphi(T_t x)$，$-\infty < t < \infty$，其中 $\varphi(x) \in \mathscr{K}_2$ 且 $\{T_t\}$ 爲 Wiener 過程的流［例如，參見 N. Wiener（1958）］。在第 4.4 節例 2 裡，已預示了積分表現方法將是研究這種隨機過程的有力工具。事實上，若 $F(u, v)$ 爲相應於 $\varphi(x)$ 的核，則 $F(u-t, v-t)$，$-\infty < t < \infty$，可以用來描述 $X(t, x)$ 的演化行爲。順便地，當 $\{X(\xi, x): \xi \in \mathscr{S}\}$ 的分佈給定，則 $\{X(t): -\infty < t < \infty\}$ 的分佈就知道了。其中

$$X(\xi, x) = \int X(t, x)\xi(t)\, dt, \qquad \xi \in \mathscr{S}.$$

換言之，只需研究特徵泛函

$$C_X(\xi) = \int_{\mathscr{S}^*} \exp[iX(\xi, x)]\, d\mu(x). \tag{4.88}$$

就好了。

上式的被積分項爲二次泛函的指數函數，這種泛函將在下面［3］加以討論。然而，每個隨機變數 $X(\xi, x)$ 本身可以利用核

$$F_\xi(u\ v) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u-t, v-t)\xi(t)\, dt \tag{4.89}$$

及定理 4.8 加以研究。

［2］ 隨機面積

設 $\{W(t) = (W_1(t), W_2(t)): t \geq 0\}$ 爲一個二維的Wiener過程。P. Lévy 希望去定義在時間區間 $[0, T]$ 上樣本曲線所圍成的面積 $S(T, \omega)$，以及連結原點與終點 $W(T, \omega)$ 的弦，爲此目的，他給出了積分

$$S(T, \omega) = \frac{1}{2}\int_0^T [W_1(t, \omega)\, dW_2(t, \omega) - W_2(t, \omega)\, dW_1(\omega)], \tag{4.90}$$

見 P. Lévy（1940）。如果曲線 $(W_1(t, \omega), W_2(t, \omega))$，$t \in [0, T]$，足夠平滑，則 $S(T, \omega)$ 必可表成通常的面積公式；但是在第 2.2 節已

證明過，Wiener 過程的樣本路徑具有無界的變差，故這是不可能的。然而，(4.90)作爲隨機積分確實是存在的。事實上，第4.5節中隨機積分存在性的條件(A.1)，(A.2)，(f.1)，(f.2)，與(f.3)可以驗證如下：首先考慮積分 $\int_0^T W_1(t,\omega)dW_2(t,\omega)$，我們令 $\mathbf{A}_t=\mathbf{B}(\{W_1(s),W_2(s)\}: s\le t)$，$t\ge 0$，則對 $\mathbf{B}_t=\mathbf{B}(W_2(s): s\le t)$，立即可看出條件(A.1)：$\mathbf{A}_t\supseteq\mathbf{B}_t$ 是顯然的；而條件(A.2)：$\mathbf{A}_t$ 與 $\{W_2(t+s)-W_2(t): s\ge 0\}$ 的獨立性，直接由二維Wiener 過程的定義得到。被積分項 $W_1(t,\omega)$ 對 (t,ω) 可測，而對任意 t，$W_1(t,\omega)$ 爲 $\mathbf{A}_t$ 可測，於是條件(f.1)與(f.2)成立。從而隨機積分 $\int_0^T W_1(t)dW_2(t)$ 存在。如果我們回憶上述 $\mathbf{A}_t$ 之定義，並且將 $W_1(t)$ 與 $W_2(t)$ 的角色交換，則 $\int_0^T W_2(t)dW_1(t)$ 亦可定義。因此我們已證明了：由隨機積分所定義的面積 $S(T,\omega)$ 是有意義的。我們稱過程 $\{S(T,\omega): T\ge 0\}$ 爲隨機面積(stochastic area)。

縱然 $S(T,\omega)$ 不見得符合面積的直觀意思，我們還是試圖來研究(4.90)所給定的隨機過程 $\{S(T,\omega): T\ge 0\}$。$\{W(t)\}$ 可以在機率空間 $(\mathscr{S}^*,\mathfrak{B},\mu)$ 上具體實現，這只要令

$$W_1(t,x)=\langle x,\chi_{[0,t]}\rangle,$$
$$W_2(t,x)=\langle x,\chi_{[-t,0]}\rangle,\qquad t\ge 0.$$

則 $W(t,x)=(W_1(t,x),W_2(t,x))$ 爲二維Wiener過程。根據第4.5節補題4.1可知，由相對於 $W(t,x)$ 的隨機積分(4.90)所定義的

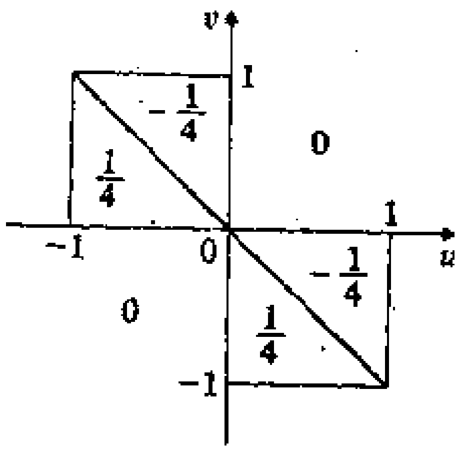


圖 8

隨機面積$S(T,x)$屬於$\mathscr{H}_2$。暫時就取$T=1$。$S(1,x)$的積分表現核$F(u,v)$可以圖示如上頁圖8：
亦即

$$F(u,v)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4} & \text{若 } uv\le 0,\quad u,v\le 1,\quad -v<u;\\[2ex] \dfrac{1}{4} & \text{若 } uv\le 0,\quad u,v\ge -1,\quad -v>u;\\[2ex] 0 & \text{其它情形}\end{cases}$$

【定理4.9】
$S(1,x)$的特徵函數$\chi(z)$與累積量可以分別寫成

$$\chi(z)=\{\cosh(\tfrac{1}{2}z)\}^{-1},\tag{4.92}$$

與

$$\begin{cases}\gamma_{2p+1}=0, & p\ge 0,\\ \gamma_{2p}=(2^{2p}-1)\dfrac{B_p}{4p}, & p\ge 1,\end{cases}\tag{4.93}$$

其中B_p爲第p個Bernuoulli數。

【證明】 由(4.91)所給定的核$F(u,v)$滿足條件(4.85)並且其固有值爲$2(2n-1)\pi$，$n=\pm1,\pm2,\cdots$，每個的重複度爲2。於是可以利用命題4.10得到

$$\chi(z)=\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4z^2}{4(2n-1)^2\pi^2}\right)^2\right]^{-1/2}=\left\{\cosh\left(\frac{1}{2}z\right)\right\}^{-1},$$

並且累積量很容易可以表成(4.93)之形。 #

復次，$S(T,x)$的積分表現核可以用F表成：

$$F\left(\frac{u}{T},\frac{v}{T}\right),\qquad T>0.$$

$\{F(u/T,v/T):T>0\}$完全描述了隨機過程$\{S(T,x):T>0\}$。

特別地，它對T的行爲描述於圖8。

[3] 二次泛函的指數

考慮實值二次泛函$\varphi(x)$的指數函數$f(x)=\exp[i\varphi(x)]$，$\varphi\in\mathscr{K}_2$。顯然$f(x)\in(L^2)$，故積分表現理論可以派上用場。在上述[1]裡，我們已指出，對這種$f(x)$的一個好問題是求算過程$\{X(t,\omega)\}$的特徵函數$C_X(\xi)$，參見(4.88)。

設$F(u,v)$爲$\varphi(x)$的積分表現核，再令積分算子F的固有值與固有函數分別記爲$\{\lambda_n: n\geq 1\}$與$\{\eta_n: n\geq 1\}$。

【命題 4.11】

變換$\mathscr{T}$將$f(x)=\exp[i\varphi(x)]$映成

$$(\mathscr{T}f)(\xi)=C(\xi)\,\delta(2i;F)^{-1/2}\exp\left[i\sum_{1}^{\infty}\frac{(\eta_n,\xi)^2}{-\lambda_n+2i}\right], \tag{4.94}$$

其中$(\cdot,\cdot)$表$L^2(\mathbf{R})$中的內積。

【證明】 由假設F可展開成(4.81)之形，故$\varphi(x)$可以表成(4.82)之隨機變數和。因此我們可將f表成

$$f(x)=\exp\left[i\sum_{1}^{\infty}\lambda_n^{-1}(\langle x,\eta_n\rangle^2-1)\right]. \tag{4.95}$$

今利用$\{\eta_n\}$爲$L^2(\mathbf{R})$中的么正系統這個事實，故任何ξ都可表成$\xi=\Sigma_n a_n\eta_n+\xi'$，其中$a_n=(\xi,\eta_n)$且$\xi'$直交於$\{\eta_n\}$。於是我們有等式$\|\xi\|^2=\Sigma_n a_n^2+\|\xi'\|^2$。由此式與(4.95)得到

$$\begin{aligned}(\mathscr{T}f)(\xi)&=\int_{\mathscr{S}^*}\exp[i\langle x,\xi\rangle]f(x)\,d\mu(x)\\&=\int_{\mathscr{S}^*}\exp\left[i\sum_n a_n\langle x,\eta_n\rangle+i\sum_n\lambda_n^{-1}(\langle x,\eta_n\rangle^2-1)\right]\\&\quad\times\exp[i\langle x,\xi'\rangle]\,d\mu(x).\end{aligned}$$

因爲 $\{\langle x, \xi'\rangle, \langle x, \xi_n\rangle: n \geq 1\}$ 爲獨立隨機變數，上述積分變成

$$= \int_{\mathscr{S}^*} \exp[i\langle x, \xi'\rangle]\, d\mu(x) \prod_n \int_{\mathscr{S}^*} \exp[ia_n\langle x, \eta_n\rangle + i\lambda_n^{-1}\langle x, \eta_n\rangle^2 - i\lambda_n^{-1}]\, d\mu(x)$$

$$= C(\xi') \prod_n \left\{(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ia_n t + (i\lambda_n^{-1} - 2^{-1})t^2]\, dt \cdot \exp(-i\lambda_n^{-1})\right\}$$

$$= C(\xi') \prod_n \left\{(1 - 2i\lambda_n^{-1})^{-1/2} \exp(-i\lambda_n^{-1}) \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{a_n^2}{1 - 2i\lambda_n^{-1}}\right]\right\}$$

$$= C(\xi')\, \delta(2i; F)^{-1/2} \exp\left[\sum_n \frac{-i\lambda_n^{-1}a_n^2}{1 - 2i\lambda_n^{-1}}\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_n a_n^2\right]$$

$$= C(\xi)\, \delta(2i; F)^{-1/2} \exp\left[\sum_n \frac{-i\lambda_n^{-1}a_n^2}{1 - 2i\lambda_n^{-1}}\right].$$

這最後的公式等於（4.94）。 #

由（4.81）式給一個 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 核 F，我們定義一個函數 $\widetilde{F}$

$$\widetilde{F}(u, v) = \sum_n \frac{i\lambda_n^{-1}}{-1 + 2i\lambda_n^{-1}} \eta_n(u)\eta_n(v). \tag{4.96}$$

函數 $\widetilde{F}$ 不再是實值的，但是它是一個 L^2 核，且與 F 共有固有函數 $\{\eta_n\}$。作爲一個積分核，$\widetilde{F}$ 可以用兩個條件刻劃：

$$\begin{aligned} &\text{a. } F \text{ 與 } \widetilde{F} \text{ 可交換，且具有相同的值域；} \\ &\text{b. } \widetilde{F}(-I + 2iF) = iF. \end{aligned} \tag{4.97}$$

【定理 4.10】

設 $\varphi(x)$ 爲 $\mathscr{K}_2$ 中的一個實值泛函並且令 $f(x) = \exp[i\varphi(x)]$。記 φ 的積分表現核爲 F 且 $\widetilde{F}$ 由（4.96）所定義，然則

1. $(\mathscr{T}f)(\xi) = C(\xi)\, \delta(2i; F)^{-1/2} \exp[\iint \widetilde{F}(u, v)\xi(u)\xi(v)\, du\, dv]$.
2. 對於 f 到 $\mathscr{K}_n$ 上的投影 f_n，我們有

$$f_0(x) = \delta(2i; F)^{-1/2},$$

$$f_{2n+1}(x) = 0, \qquad n \geq 0,$$

並且$f_{2n}(x)$的積分表現核為

$$\delta(2i;F)^{-1/2}(-1)^n\frac{\hat{F}^{(2n)}}{n!},\tag{4.98}$$

其中$\hat{F}^{(2n)}$為$\hat{F}^{n\otimes}$的對稱化。

【證明】

1. 只不過是命題4.11之改述成(4.96)的記號。
2. $(\mathscr{T}f)(\xi)$的冪級數展開為

$$(\mathscr{T}f)(\xi)=C(\xi)\,\delta(2i;F)^{-1/2}\sum_0^\infty\frac{1}{n!}\left[\iint F(u,v)\xi(u)\xi(v)\,du\,dv\right]^n$$

每一項都是ξ的$2n$次單項式，由定理4.5知，這必等於$(\mathscr{T}f_{2n})(\xi)$，換言之，

$$(\mathscr{T}f_0)(\xi)=C(\xi)\,\delta(2i;F)^{-1/2},\qquad 且$$
$$(\mathscr{T}f_{2n})(\xi)=\frac{1}{n!}C(\xi)\,\delta(2i;F)^{-1/2}(\hat{F}^{n\otimes},\xi^{2n\otimes})_{L^2(\mathbf{R}^{2n})}.$$

由這些關係就得到(4.98)，而$f_{2n+1}(x)=0$是顯然的。 #

類似地，我們考慮形如$g(x)=\exp[\varphi(x)]$之指數函數，其中$\varphi(x)$如前述假設為$\mathscr{H}_2$中的實值函數。

【命題4.12】

$g(x)$屬於(L^2)的充要條件為φ之積分表現核不具有固有值λ_n滿足$0<\lambda_n\le 4$。如果這個條件成立則

$$(\mathscr{T}g)(\xi)=C(\xi)\,\delta(2i;F)^{-1/2}\exp\left[\iint \hat{G}(u,v)\xi(u)\xi(v)\,du\,dv\right],\tag{4.99}$$

其中$\hat{G}$為實值$\hat{L}^2(\mathbf{R}^2)$函數，定義如下：

$$\hat{G}(u,v)=\sum_n(-\lambda_n+2)^{-1}\eta_n(u)\eta_n(v).\tag{4.100}$$

進一步。若$g_n(x)$表示$g(x)$到$\mathscr{H}_n$上之投影，則

$$g_0(x)=\delta(2;F)^{-1/2}$$
$$g_{2n+1}(x)=0, \qquad n\geq 0,$$

且

$$(\mathscr{T}g_{2n})(\xi)=\frac{1}{n!}C(\xi)\,\delta(2;F)^{-1/2}(\tilde{G}^{n\otimes},\xi^{2n\otimes})_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}. \tag{4.101}$$

【證明】 下面的計算是直接的：

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{S}^*} g(x)^2\,d\mu(x) &= \int_{\mathscr{S}^*}\exp\left[2\sum_n \lambda_n^{-1}(\langle x,\eta_n\rangle^2-1)\right]d\mu(x)\\ &=\prod_n\left\{(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[2\lambda_n^{-1}(x^2-1)]\exp[-\tfrac{1}{2}x^2]\,dx\right\}.\end{aligned}$$

在大括號{ }中的積分存在的充要條件是$\lambda_n^{-1}<¼$，$\forall n$。如果這個不等式對所有n皆成立，則上述積分的乘積變成$\Pi_n\{(1-4\lambda_n^{-1})^{-1/2}\times \exp[-2\lambda_n^{-1}]\}$，而這是收斂的且等於$\delta(4;F)$。

命題的第二部分，包括(4.99)以及$g_n(x)$的表式，其證明類似於定理4.10，故我們省略掉。 #

一個有趣的例子告訴我們上述的$g(x)$很自然地出現。在電機工程的訊號偵察問題，我們用了Gauss測度μ^X相對於Wiener測度μ^W的(Radon-Nikodym)密度函數，其中我們假設μ^X與μ^W等價。設$\{W(t):t\in[0,1]\}$為一個Wiener過程，$F_1(s,u)$為一個Volterra型L^2核(即$F_1(s,u)=0$，當$s<u$)。如果我們定義

$$X(t,\omega)=W(t,\omega)-\int_0^t\left\{\int_0^s F_1(s,u)\,dW(u,\omega)\right\}ds, \tag{4.102}$$

則$\{X(t):t\in[0,1]\}$為一個Gauss過程。進一步知道，$\{X(t)\}$的分佈μ^X等價於Wiener測度μ^W；為了對這個論題作進一步的討論，讀者可參閱M. Hitsuda(1968)以及第5.7節。密度函數$\rho(\omega)=(d\mu^X/d\mu^W)(\omega)$

爲 Wiener 過程的二次泛函之指數函數，利用隨機積分可以表成下形：

$$\rho(\omega) = \exp\left[\int_0^1 \int_0^s F_1(s, u)\, dW(u, \omega)\, dW(s, \omega) - \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\int_0^s F_1(s, u)\, dW(u, \omega)\right\}^2 ds\right]. \tag{4.103}$$

仿以前的作法，將 $W(t)$，$X(t)$ 與 ρ 實現爲 $(\mathscr{S}^*, \mathscr{B}, \mu)$ 上的泛函使得我們的理論可以派上用場。首先，$W(t)$ 由 $\langle x, \chi_{(0,t)}\rangle$ 來實現，$X(t)$ 由 $\mathscr{H}_1$ 中的 $\langle x, \chi_{(0,t)}\rangle - \langle x, \int_0^t F_1(s, \cdot)\, ds\rangle$ 來實現。因爲在 (4.103) 中，ρ 的指數之第一項爲一隨機積分，事實上爲 $\mathscr{H}_2$ 的一個元素，故由第 4.5 節的結果就得到它的積分表現。另外，$\{\cdot\}^2$ 項只不過是

$$2H_2\left(\int_0^s F_1(s, u)\, dW(u); \int_0^s F_1(s, u)^2\, du\right) + \int_0^s F_1(s, u)^2\, du.$$

於是，再由第 4.5 節可知，(4.103) 中的指數項 $[\cdot]$ 與 $\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^s F_1(s, u)^2\, du\, ds$ 之和爲 $\mathscr{G}_2$ 的元素，並且其積分表現核 $G(u, v)$ 可以表成

$$G(u, v) = \frac{1}{2}\left\{F(u, v) - \int_{u\vee v}^1 F(u, s)F(s, v)\, ds\right\}, \tag{4.104}$$

其中 $F(u, v) = F_1(u\vee v, u\wedge v)$，$(u, v)\in[0, 1]^2$。因此 $\rho(\omega)$ 可實現成表式

$$g(x) = \exp[\psi(x)], \qquad \psi(x) = \psi_0 + \psi_2(x), \tag{4.105}$$

其中 $\psi_2(x)$ 爲 $\mathscr{H}_2$ 泛函，具有核 $F(u, v)$；ψ_0 爲常數 $-\frac{1}{2}\int_0^1\{\int_0^s F_1(s, u)^2 du\}ds$。

下面的註解是有關核 G 的固有值。如果積分算子 F_1 的同伴算子記爲 F_1^*，則 F 可寫成 $F_1 + F_1^*$，故 $G = \frac{1}{2}\{F_1 + F_1^* - F_1^* F_1\}$。因爲 $I - 2G = (I - F_1^*)(I - F_1) > 0$，所以 G 的固有值不在 $[0, 2]$ 之中，由命題 4.12 知，$g(x)$ 屬於 (L^2) 的充要條件爲 G 在 $(2, 4]$ 之中沒有固有值。如果這個條件成立，則 $\exp[\psi_2(x)]$ 在 $\mathscr{H}_n$ 上的投影 $g_n(x)$ 可以由 (4.101) 來定

義。進一步的性質可以利用核$G^{n\otimes}$來研究。對於$n=0$的特殊情形，我們有$\exp(\psi_0)=\delta(2;G)^{1/2}$，從而(4.105)中的$g(x)$或(4.103)中的$\rho(\omega)$之期望值爲1。

[4] 隨機微分方程

今我們探討由隨機積分方程所定義出的隨機過程$\{X(t): t\in[0,T]\}$:

$$X(t,\omega)=X_0(\omega)+\int_0^t a(u,X(u,\omega))\,du+\int_0^t b(u,X(u,\omega))\,dW(u,\omega),$$

$$0\le t\le T \qquad (4.106)$$

所定義出的隨機過程$\{X(t): t\in[0,T]\}$，其中初期值X_0爲一隨機變數，獨立於$\mathbf{B}_t=\mathbf{B}(W(u): u\in[0,t])$。如果解答$X(t)$存在，則殆遍地它是$t$的連續函數。我們的問題是求方程式(4.106)的解答$X(t)$，$t\in[0,T]$，使得對每個t，$X(t)$對$\mathbf{A}_t$可測，其中$\mathbf{A}_t=\mathbf{B}(X_0, W(u): 0\le u\le t)$。爲此，我們對$a$與$b$作如下的假設：

1. 對任意固定的x，$a(u,x)$與$b(u,x)$爲u的連續函數；
2. a與b滿足Lipschitz條件：即存在常數K_1，K_2使得對任意$u\in[0,T]$下述條件成立：

$$|a(u,x)-a(u,y)|\le K_1|x-y|, \quad 且 \quad |b(u,x)-b(u,y)|\le K_2|x-y|.$$

在這些假設下，(4.106)式存在有唯一的解答$\{X(t): t\in[0,T]\}$，並且它是一個Markov過程。(4.106)也可以解釋成下形之隨機微分方程：

$$\begin{cases} dX(t,\omega)=a(t,X(t,\omega))\,dt+b(t,X(t,\omega))\,dW(t,\omega), & 0\le t\le T, \\ X(0,\omega)=X_0(\omega). \end{cases} \qquad (4.107)$$

這可參見K. Itô與H. P. Mckean Jr. (1965)或H. P. Mckean Jr. (1969)這些人的書。

在本小節裡，我們要利用積分表現理論以得到機率空間$(\mathcal{S}^*, \mathfrak{B}, \mu)$上的一個隨機過程使其爲(4.106)或(4.107)的具體解答。我們在第4.4節已看過，這個方法對可以實現於(L^2)上的隨機過程亦行得通。我們繼

續使用在那裡用過的記號，例如Wiener過程$W(t,x)=\langle x,\chi_{[t\wedge 0, t\vee 0]}\rangle$，$\sigma$環$\mathscr{B}_t$，Wiener過程的流$\{T_t\}$，单正群$\{U_t\}$，子空間$\{L_t^2\}$，…等等。有了這些記號就可以說出我們的假設如下：

$$X(t)\text{ 可以表成 }X(t)=U_t\varphi\text{，}\varphi\text{ 爲 }L_0^2\text{ 之某元；}$$
$$\text{在（4.107）中的 }a\text{ 與 }b\text{ 跟 }t\text{ 無關並且 }a(X(0)),\ b(X(0))\in(L^2), \tag{4.108}$$

（有關N.Wiener的非線性網路理論，參見第A.4節）。從這些假設裡，我們看出$a(X(0))$與$b(X(0))$皆屬於L_0^2，更進一步，$a(X(t))=U_t a(X(0))$且$b(X(t))=U_t b(X(0))$，因此兩者皆屬於L_t^2。從而，若$b_n(X(t))$爲$b(X(t))$到$\mathscr{H}_n$上的投影，則$b_n(X(t))=U_t b_n(X(0))$。今$F_n(u_1,u_2,\cdots,u_n)$爲$b_n(X(0))$的積分表現核，則第4.4節的命題4.5告訴我們若$u_j>0$對某j成立，則$F_n(u_1,u_2,\cdots,u_n)=0$。而由命題4.6可知，$b_n(X(t))$的核爲$F_n(u_1-t,u_2-t,\cdots,u_n-t)$。我們也可以將$dW(t)$與$\chi_{dt}(u-t)$關連起來，其中$\chi_{dt}$表示$[0,dt]$之示性函數。復次，由第4.5節命題4.1的證明可知，$b_n(X(t))dW(t)(\in\mathscr{H}_{n+1})$的積分表現核可以將乘積$\chi_{dt}(u_1-t)F_n(u_2-t,u_3-t,\cdots,u_{n+1}-t)$，$u_1\geq u_2\geq\cdots\geq u_{n+1}$，對稱化而得到。對於$a(X(t))$可依樣畫葫蘆。至於$a_n(X(t))$，由於$a(X(t))$到$\mathscr{H}_n$上的投影$a_n(X(t))$滿足$a_n(X(t))=U_t a_n(X(0))$並且$a_n(X(t))dt$爲$\mathscr{H}_n$的一元素，故其積分表現核只要將$a_n(X(t))$乘上$dt$就得到了。因此我們已將（4.107）之隨機微分方程表成$\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$，$n=0,1,2,\cdots$中的一組函數方程（functional equation）了。

我們現在利用上述的方法來把下列三個隨機微分方程的明白解答展示出來。

【例1】

首先是Lagevin方程

$$dX(t)=-\lambda X(t)\,dt+dB(t),\qquad \lambda>0, \tag{4.109}$$

其中時間區間取爲$(-\infty,\infty)$。只要稍作顯然的修飾，我們的結果就可以

推廣到其它時間區間的情形。我們很容易驗證，這個方程的係數函數滿足解答存在與唯一的所有條件。對於滿足（4.109）之$X(t)$，我們現在給出一個明白公式。令$X_n(t)$表示$X(t)$到$\mathscr{K}_n$上的投影，再令$X_n(0)$的積分表現核為$F_n(u_1, u_2, \cdots, u_n)$。然則，$\{d_tF_n(u_1-t, u_2-t, \cdots, u_n-t): n \geq 0\}$跟$dX(t)$關連，而$\{-\lambda F_n(u_1-t, u_2-t, \cdots, u_n-t)dt: n \neq 1\}$與$-\lambda F_1(u_1-t)dt+\chi_{dt}(u_1-t)$（$n=1$）跟$-\lambda X(t)dt+dW(t)$關連。利用這些核，（4.109）可以表成

$$
\begin{aligned}
d_tF_0 &= -\lambda F_0\, dt;\\
d_tF_1(u_1-t) &= -\lambda F_1(u_1-t)\, dt + \chi_{dt}(u_1-t);\\
d_tF_n(u_1-t, u_2-t, \ldots, u_n-t) &= -\lambda F_n(u_1-t, u_2-t, \ldots, u_n-t)\, dt,\\
&\qquad n = 2, 3, \ldots. \qquad (4.110)
\end{aligned}
$$

因為$F_n \in \hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$，故（4.110）可能的唯一解如下：

$$
\begin{cases} F_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, & n \neq 1,\\ F_1(u_1) = e^{\lambda u_1}\chi_{(-\infty, 0]}(u_1), \end{cases} \qquad (4.111)
$$

因此（4.109）的解答$X(t)$給如下：

$$
X(t, x) = e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda u}\, dW(u, x). \qquad (4.112)
$$

這是第4.4節例1之特殊情形，在那兒的$\{X(t): -\infty < t < \infty\}$為定常Gauss過程，具有平均值0，協變函數$(2\lambda)^{-1}\exp[-\lambda|t|]$。我們稱上述的過程為Ornstein-Uhlenbeck過程，或Ornstein-Uhlenbeck Brown運動。我們以前已注意過，在第2.6節[3]註2之意味下，（4.112）之表現式是正準的。

【例2】

如上述，時間區間取為$(-\infty, \infty)$，在（4.108）的假設下，我們欲求隨機微分方程

$$
dX(t) = (aX(t) + a')\, dt + (bX(t) + b')\, dW(t). \qquad (4.113)
$$

的解答。令$X_n(0)$為$X(0)$到$\mathscr{H}_n$的投影，並且記其相應的核為$F_n \in L^2(\mathbf{R}^n)$。仿例1之論證，可將(4.113)式改成

$$\begin{aligned} d_t F_0 &= aF_0\, dt + a' \\ d_t F_n(u_1 - t, u_2 - t, \ldots, u_n - t) & \\ &= \{aF_n(u_1 - t, u_2 - t, \ldots, u_n - t) + a'\}\, dt \\ &\quad + \chi_{dt}(u_1 - t)\{bF_{n-1}(u_2 - t, \ldots, u_n - t) + b'\,\delta_{n,1}\}, \\ &\quad n \geq 1, \quad t \geq u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_n. \end{aligned} \tag{4.114}$$

今假設$E(X(t))=0$，於是得到$F_0=0$，因而$a'=0$。對於$n=1$的情形，(4.114)可以如例1明白解出來，得到

$$F_1(u_1) = b'\{\exp[-au_1]\}\chi_{(-\infty,0]}(u_1).$$

復次，條件$F_1 \in L^2(\mathbf{R})$逼使$a<0$，利用這個F_1，我們可以進而討論(4.114)中$n=2$的情形。對於$t>0$，我們得到方程式

$$\begin{aligned} &F_2(u_1 - t, u_2 - t) - F_2(u_1, u_2) \\ &\quad = a\int_{u_1 \vee 0}^{t} F_2(u_1 - s, u_2 - s)\, ds + bb'\int_{u_2 \vee 0}^{t} \exp[-a(u_2 - s)]\chi_{ds}(u_1 - s). \end{aligned}$$

這個方程式顯示F_2跟u_1無關，並且其解答為

$$F_2(u_1, u_2) = bb' \exp(-au_2)\chi_{(-\infty,0]}(u_1), \qquad u_1 \geq u_2.$$

當F_{n-1}已知時，利用(4.114)就可以得到F_n。因此，由歸納法，我們就可以造出$F_n(u_1, u_2, \cdots, u_n)$，其中$u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_n$，$n \geq 1$。再由對稱化，我們就得到

$$F_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (n!)^{-1} b^{n-1} b' \exp\left[-a \min_{1 \leq j \leq n} u_j\right] \chi_{(-\infty,0]^n}(u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad n \geq 1, \tag{4.115}$$

並且隨機過程本身可以表成下形：

$$X(t)=\sum_{1}^{\infty}X_n(t), \tag{4.116}$$

其中$X_n(t)=U_tX_n(0)$，並且$X_n(0)$所相應的核爲（4.115）所給定的F_n，其中$b^2<-2a$。

【註】 對於這個例子，我們可以求得非線性預估子（predictor）的一個明白表式。爲此，我們先證明$\mathfrak{B}_t(X)\equiv\mathfrak{B}(X(s):s\leq t)$跟$\mathfrak{B}_t$一致，因此當$\{X(s):s\leq 0\}$已知時，$X(t)$，$t>0$，的最適（非線性）預估子$E(X(t)|\mathfrak{B}_0(X))=E(X(t)|\mathfrak{B}_0)\equiv\hat{X}(t)$，可以利用積分表現求得。事實上，若$\hat{X}_n(t)$表示$\hat{X}(t)$到$\mathscr{H}_n$上的投影，則由（4.115）知其積分表現核形如

$$\begin{aligned}
&F_n(u_1-t,u_2-t,\ldots,u_n-t)\chi_{(-\infty,0]^n}(u_1,u_2,\ldots,u_n)\\
&=(n!)^{-1}b^{n-1}b'\exp(at)\exp\left[-a\min_{1\leq j\leq n}u_j\right]\chi_{(-\infty,0]^n}(u_1-t,u_2-t,\ldots,u_n-t)\\
&\quad\times\chi_{(-\infty,0]^n}(u_1,u_2,\ldots,u_n)\\
&=(n!)^{-1}b^{n-1}b'\exp(at)\exp\left[-a\min_{1\leq j\leq n}u_j\right]\chi_{(-\infty,0]^n}(u_1,u_2,\ldots,u_n).
\end{aligned}$$

這是隨機微分方程的解答$X(t)$爲$\mathfrak{B}_t$可測的(L^2)函數，但不爲$U_t\varphi$之形的例子。不過，對這種情形，仍然可以有效地運用積分表現理論，求得解答。

【例3】

設$f\in\mathscr{C}([0,\infty))$。隨機微分方程

$$\begin{cases}dX(t)=f(t)X(t)\,dW(t),\\ X(0)=1,\end{cases} \tag{4.117}$$

的解答爲

$$X(t)=\exp\left[\int_0^t f(u)\,dW(u)-\frac{1}{2}\|f\|^2\right]$$

我們要來證明，這個解答可以由求解一組表成等價於（4.117）之核的方程式而得到。如前述，令$X_n(t)$表示$X(t)$在$\mathscr{K}_n$上的投影，並且$F_n(u_1, u_2, \cdots, u_n; t)$為相應的核。由假設知$X(t)$為$\mathfrak{B}_t$可測，故$X_n(t)$亦然，從而$F_n(u_1, u_2, \cdots, u_n; t)$在$[0, t]^n$外面等於0。

現在我們來建構解答。由（4.117）的第一式我們得到$X_0(t)$滿足$dX_0(t)=0$，再配合上初期條件就得到$X_0(t)\equiv 1$。當$n\geq 1$時，將（4.117）式投影到$\mathscr{K}_n$上，得到

$$dX_n(t)=f(t)X_{n-1}(t)\,dW(t), \tag{4.118}$$

表成核，得到

$$d_tF_n(u_1, u_2, \ldots, u_n; t)=f(t)\chi_{dt}(u_1-t)F_{n-1}(u_2, \ldots, u_n; t), \quad u_1\geq u_2\geq\cdots\geq u_n. \tag{4.119}$$

因為$F_n(u_1, u_2, \cdots, u_n; 0)$顯然為0，如果將（4.119）式在$[0, t]$上作積分。我們就得到

$$F_n=n^{-1}F_{n-1}\rhd f, \quad n\geq 1,$$

其中$\rhd$為第4.5節所介紹的乘積。因此$F_n(u_1, u_2, \cdots, u_n; t)$等於$(n!)^{-1}(f^{n\otimes}\chi_{(s,t)^n})(u_1, u_2, \cdots, u_n)$，再由第4.5節之命題4.9，就得到$X_n(t)=H_n(\int_0^t f(u)\,dW(u); \|f\|_t^2)$。因此我們已經證明了$X(t)=\Sigma_n X_n(t)=\Sigma_n H_n(\int_0^t f(u)\,dW(u); \|f\|_t^2)$就是

$$X(t)=\exp\left[\int_0^t f(u)\,dB(u)-\frac{1}{2}\|f\|_t^2\right].$$

我們注意到，（4.117）式是（4.107）式的特例，這只要在（4.107）式中取$a(t, x)=f(t)x$且$b(t, x)=0$就好了。因此（4.117）的解答之存在性與唯一性就有所保證了。上面所得到的$X(t)$就是解答，再無其它了。

讀者可能已經注意到，上例只不過是前節命題4.9的改述而已。由（4.77）所給出的$Y(t)$滿足（4.78）式，而（4.78）式等價於（4.117），並且在那裡又假設了$f(t)$的連續性，故解答的唯一性也成立。因此，

這個$Y(t)$過程的建構，確實解決了所討論之方程式。

4-7 Fourier-Wiener變換

現在我們要在$(L^2)=L^2(\mathscr{S}^*,\mathfrak{B},\mu)$上尋找一個線性變換，作爲$L^2(\mathbb{R}^n)$上的Fourier變換之無窮維類推。回想一下，我們在第4.3節所定義的變換$\mathscr{T}$，對於$\varphi(x)\in(L^2)$的作用爲

$$(\mathscr{T}\varphi)(\xi)=\int_{\mathscr{S}^*}e^{i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,d\mu(x),\qquad \xi\in\mathscr{S}. \tag{4.120}$$

在形式上這雖然類似於Fourier變換，但是變換$\mathscr{T}$卻將(L^2)映至$\mathscr{S}$上的泛函所成的空間。事實上是映至再生核Hilbert空間，以$C(\xi-\eta)$，$(\xi,\eta)\in\mathscr{S}\times\mathscr{S}$，爲再生核，其中$C(\xi)$爲$\mu$之特徵泛函。因此$\mathscr{T}$不可能是一個單正算子（unitary operator）。

另外，Cameron與Martin（1945），（1947a）在(L^2)上引入另一個變換，異於$\mathscr{T}$，但更像Fourier變換。本節我們要來探討這個變換，由於它對$(\mathscr{S}^*,\mathfrak{B},\mu)$上的調性分析扮演了重要角色，故今日已廣爲人所知。

對於$\varphi(x)\in(L^2)$，我們採取下面兩個步驟：

1. 將變數作$\sqrt{2}$的複化：$\varphi(x)\to\varphi(\sqrt{2}\,x+iy)$，$y\in\mathscr{S}^*$；
2. 然後對$d\mu$作積分：

$$(\mathfrak{F}\varphi)(y)=\int_{\mathscr{S}^*}\varphi(\sqrt{2}\,x+iy)\,d\mu(x). \tag{4.121}$$

現在我們必須證明，由（4.121）式所定義的變換$\mathfrak{F}$，將$\varphi(x)$映至泛函y，是適定的（well-defined）。其次，按常理，我們要將$\mathfrak{F}$應到到第4.1節之基本泛函。

【命題 4.13】

對於$\mathscr{S}^*$上的多項式類及指數型泛函類，變換$\mathfrak{F}$分別都是適定的，並且$\mathfrak{F}$都將各類映至自身。

【證明】 設 $\varphi(x)$ 爲基於序列 $\{\xi_k\}$ 之 Fourier-Hermite 多項式，並且表成下形

$$\varphi(x)=\prod_k H_{n_k}\left(\frac{\langle x,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right). \tag{4.122}$$

由 $\sqrt{2}$ 複化之第一步，得到

$$\varphi(\sqrt{2}x+iy)=\prod_k H_{n_k}\left(\langle x,\xi_k\rangle+\frac{i\langle y,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right).$$

又因爲 $\langle x,\xi_k\rangle$ 爲 $(\mathscr{S}^*,\mathfrak{B},\mu)$ 上互相獨立之隨機變數，故

$$\int_{\mathscr{S}^*}\varphi(\sqrt{2}x+iy)\,d\mu(x)=\prod_k\int_{\mathscr{S}^*}H_{n_k}\left(\langle x,\xi_k\rangle+\frac{i\langle y,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right)d\mu(x).$$

利用第A.5 節公式（A.21）有關 H_n 之加法公式，取 $a=\sqrt{2}$，則右邊之每一因子皆可展成

$$\prod_k\sum_{j=0}^{n_k}\binom{n_k}{j}2^{(n_k-j)/2}i^jH_j\left(\frac{\langle y,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right)\int_{\mathscr{S}^*}H_{n_k-j}\left(\frac{\langle x,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right)d\mu(x).$$

因爲除了 $j=n_k$ 之外，每一積分皆爲 0，故此和只不過是 $i^{n_k}H_{n_k}(\langle y,\xi_k\rangle/\sqrt{2})$，於是我們得到結論：對於（4.122）之 φ，我們有

$$\int_{\mathscr{S}^*}\varphi(\sqrt{2}x+iy)\,d\mu(x)=\prod_k i^{n_k}H_{n_k}\left(\frac{\langle y,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right).$$

因此，對於Fourier-Hermite多項式 φ，變換 $\mathfrak{F}$ 確實是適定的，並且若 φ 給如（4.122），則有

$$(\mathfrak{F}\varphi)(y)=i^n\varphi(y),\qquad n=\sum_k n_k \tag{4.123}$$

進一步，$\mathfrak{F}$ 可對 $\langle x,\xi_k\rangle$ 的一般多項式來定義，因爲這些多項式可表爲建基於 $\{\xi_k\}$ 之 Fourier-Hermite 多項式的線性組合，並且所得

的結果仍爲多項式。

今考慮指數型泛函，比如

$$\varphi(x) = \exp[a\langle x, \xi\rangle], \qquad a \in \mathbf{C}, \qquad \|\xi\| = 1. \tag{4.124}$$

對於這個 φ 我們施行(1)與(2)的步驟，得到

$$\varphi(\sqrt{2}\,x + iy) = \exp[ia\langle y, \xi\rangle]\exp[\sqrt{2}\,a\langle x, \xi\rangle]$$

以及

$$\int_{\mathscr{S}^*} \varphi(\sqrt{2}\,x + iy)\, d\mu(x) = \exp[ia\langle y, \xi\rangle + a^2],$$

從而證明了

$$(\mathfrak{J}\varphi)(y) = \exp[ia\langle y, \xi\rangle + a^2]. \tag{4.125}$$

於是命題就完全證明完畢。 #

【定理 4.11】

上述對多項式及指數型泛函所定義的變換 $\mathfrak{J}$ 可以唯一地延拓成 (L^2) 上的單正算子。對於 $\varphi(x) \in \mathscr{H}_n$，我們有

$$(\mathfrak{J}\varphi)(x) = i^n\varphi(y). \tag{4.126}$$

【證明】 回想一下，對於 $L^2(\mathbf{R})$ 的任意完備么正系統 $\{\xi_k\} \subseteq \mathscr{S}$，建基於 $\{\xi_k\}$ 之所有 n 次 Fourier-Hermite 多項式構成了 $\mathscr{H}_n$ 之基底。由於對形如 (4.122) 之任意 $\varphi(x)$，(4.123) 式成立，利用這個事實，我們容易看出，對任意 n 次之Fourier-Hermite多項式，$\mathfrak{J}$ 皆有定義，並且 (4.126) 式成立。因此，對任意么正基中之元 φ，皆有保距性 $\|\mathfrak{J}\varphi\| = \|\varphi\|$。從而，$\mathfrak{J}$ 可延拓成 $\mathscr{H}_n$ 上的單正算子，並且滿足 (4.126) 式。

如果我們希望由定義在指數型泛函上的 $\mathfrak{J}$ 開始下手，我們對於多項式也可以得到上述的結果。因爲若將形如 (4.124) 之任意 $\varphi(x)$ 乘以 $\exp(-\frac{1}{2}a^2)$，我們就得到Hermite多項式 $H_n(\langle x, \xi\rangle/\sqrt{2})$，$n \geq 0$（第A.5節[1]），之生成函數。於是我們可以施用變換 $\mathfrak{J}$，利用

指數型泛函已知的結果，就得到$\mathfrak{J}$對多項式的作用。當然，這樣所得的結果跟上述由Hermite多項式作出發點是一樣的。因此我們可以將$\mathfrak{J}$延拓到整個空間(L^2)上。這樣定理就證明完畢了。 #

【定義4.5】

由定理4.11所得到的定義在(L^2)上的單正算子$\mathfrak{J}$，稱爲Fourier-Wiener變換。

正如$L^2(\mathbb{R}^n)$上的Fourier變換，上述之Fourier-Wiener變換也滿足

$$\mathfrak{J}^4 = I, \quad (I = \text{單位算子}) \tag{4.127}$$

此式直接由(4.126)可以得到。另外，由定理也很容易推得另一個性質：

$$P_n\mathfrak{J} = \mathfrak{J}P_n, \qquad n \geq 0, \tag{4.128}$$

其中P_n爲從(L^2)到子空間$\mathscr{H}_n$之投影。

【註解】 跟平常之Fourier變換比起來，由(4.121)式所定義之$\mathfrak{J}$似乎有點兒怪異。爲澄清這點並且給出$\mathfrak{J}$的一個直觀解釋，我們在下面要來注意一個事實並且作一個觀察。

對於任意複數a，我們可以在(L^2)上定義一個算子$\mathfrak{J}_a$如下：

$$(\mathfrak{J}_a\varphi)(y) = \int_{\mathscr{S}^*} \varphi(ax + iy)\, d\mu(x), \qquad \varphi \in (L^2). \tag{4.129}$$

這個算子是適定的，並且有趣的是，$\mathfrak{J}_a$爲單正算子之充要條件爲$a = \sqrt{2}$。當$a = 1$時，我們稱$\mathfrak{J}_1$爲Gauss變換，並且一個$x \in \mathscr{S}^*$之單項式會被$\mathfrak{J}_1$變換成Fourier-Hermite多項式。在此我們略去細節不提，讀者可參閱第A.5節(A.30)之公式。

【觀察】 設$\{\xi_k\}$爲$L^2(\mathbb{R})$中的一組完備么正系統，並且令φ爲有限多個$\langle x, \xi_k \rangle$之函數，比如，爲$\langle x, \xi_1 \rangle, \cdots, \langle x, \xi_n \rangle$之函數。這函數稱爲"馴順"函數(tame function)，並且存在$\mathbb{R}^n$上一個函數f使得

$$\varphi(x)=f(\langle x,\xi_1\rangle,\ldots,\langle x,\xi_n\rangle). \tag{4.130}$$

$\varphi\in(L^2)$ 之條件等價於 $f\in L^2(\mathbf{R}^n, \exp(-\frac{1}{2}\Sigma_j t_j^2)dt_1\cdots dt_n)$ 之條件。如果我們將此改寫成

$$f(\sqrt{2}t_1,\ldots,\sqrt{2}t_n)\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_1^n t_j^2\right]\in L^2(\mathbf{R}^n),$$

則就可以來進行某些形式的計算：

$$\begin{aligned}(\mathfrak{F}\varphi)(y)&=\int_{\mathscr{S}^*}f(\sqrt{2}\langle x,\xi_1\rangle+i\langle y,\xi_1\rangle,\ldots,\sqrt{2}\langle x,\xi_n\rangle+i\langle y,\xi_n\rangle)\,d\mu(x)\\
&=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n}\!\!\cdots\int f(\sqrt{2}t_1+is_1,\ldots,\sqrt{2}t_n+is_n)\\
&\quad\times\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_1^n t_j^2\right]dt_1\cdots dt_n,\\
&=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n}\!\!\cdots\int\exp\left\{i\sum_1^n u_j\frac{s_j}{\sqrt{2}}\right\}f(\sqrt{2}u_1,\ldots,\sqrt{2}u_n)\\
&\quad\times\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_1^n u_j^2\right]\cdot\exp\left[\frac{1}{2}\sum_1^n\left(\frac{s_j}{\sqrt{2}}\right)^2\right]du_1\cdots du_n,\end{aligned}$$

其中 $s_j=\langle y,\xi_j\rangle$ 並且 $u_j=t_j+is_j/\sqrt{2}$，$j=1,2,\cdots,n$。這些計算背後的意圖是要證明，若泛函 φ 由（4.130）給定，那麼我們作出 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 函數 $f(\sqrt{2}t_1,\cdots,\sqrt{2}t_n)\exp[-\frac{1}{2}\Sigma_1^n t_j^2]$，作通常的Fourier變換得到 $g(v_1,\cdots,v_n)$，將此 g 乘以 $\exp[\frac{1}{2}\Sigma_1^n v_j^2]$，然後將 v_j 改換成 $\langle y,\xi_j\rangle/\sqrt{2}$，我們就得到 $\varphi(x)$ 的Fourier-Wiener變換了。

當然上述的計算完全是形式上的。例如，眞正說來，我們必須限定 f 使得 $f(\sqrt{2}t_1+is_1,\cdots,\sqrt{2}t_n+is_n)$ 是適定的，並且對 du_j 的積分也要給予明確的意義，其中 u_j 爲複變數，等等。除開這些點之外，我們希望上述的形式計算能夠給出爲什麼（4.121）的變換叫做Fourier變換的一些道理。

令 $\{T_t:-\infty<t<\infty\}$ 爲Brown運動之“流”（參見第4.4節），再令 $\{U_t:-\infty<t<\infty\}$ 爲 (L^2) 上的一參數單正群，定義爲

$$(U_t\varphi)(x) = \varphi(T_t x),\ -\infty < t < \infty,\ \varphi \in (L^2).$$

【命題 4.14 】

Fourier-Wiener 變換 $\mathfrak{J}$ 與 $\{U_t\}$ 是可交換的

$$\mathfrak{J}U_t = U_t\mathfrak{J} \qquad -\infty < t < \infty. \tag{4.131}$$

【證明】 設 $\varphi(x) \in (L^2)$ ，由計算就可以得到 (4.131) 式：

$$\begin{aligned}(\mathfrak{J}U_t\varphi)(y) &= \int_{\mathscr{S}^*} \varphi(T_t(\sqrt{2}x + iy))\, d\mu(x) \\ &= \int_{\mathscr{S}^*} \varphi(\sqrt{2}x' + iT_t y)\, d\mu(x') \text{ 因爲 } \mu \text{ 爲 } T_t \text{ 不變，} \\ &= (\mathfrak{J}\varphi)(T_t y) = U_t(\mathfrak{J}\varphi)(y).\end{aligned}$$

#

類似於平常 Fourier 變換，我們將發現 Fourier-Wiener 變換還具有進一步有意義的性質。例如，微分算子及乘以獨立變數之算子，分別可被 $\mathfrak{J}$ 對調。這些性質我們將在以後以旋轉群爲內涵考慮調性分析（於無窮維空間上！）時，加以討論。

第五章

旋轉羣

5·1 白噪聲的變換(I)：旋轉

再一次我們由$E\subseteq L^2(\mathbf{R})\subseteq E^*$出發，其中如第3.1節所述，$E$為一個實的核式空間，$E^*$為其偶伴空間，它們之間由典型的雙線性形式$<x,\xi>$，$x\in E^*$，$\xi\in E$，加以連結。

利用特徵泛函$C(\xi)=\exp[-\frac{1}{2}\|\xi\|^2]$，我們可以在$E^*$上引進白噪聲的一個測度$\mu$。在這個基礎下，我們可以引進無窮維旋轉群［這是H. Yoshizawa(1970)首先做的］。

【定義5.1】

所謂E的一個旋轉(rotation)是指$L^2(\mathbf{R})$的一個變換g滿足：

1. g為一個直交變換，亦即一個線性變換使得$\|gf\|=\|f\|$，$f\in L^2(\mathbf{R})$；並且
2. g局限到E時，為E的一個同胚(homeomorphism)。

所有E的旋轉記為$O(E)$，我們可以定義乘法運算使其變成一個群。對於任意g_1，$g_2\in O(E)$，我們定義乘積g_1g_2如下：

$$(g_1g_2)\xi=g_1(g_2\xi),\qquad \xi\in E. \tag{5.1}$$

顯然乘積g_1g_2屬於$O(E)$，並且因為每個旋轉都是一個線性同胚，故對於任意$g\in O(E)$都可以找到逆元素$g^{-1}\in O(E)$。又單位元素就是單位算子。因此，當我們賦予(5.1)之乘法運算，我們就證明了$O(E)$構成一個群。

對於$O(E)$我們可以給予下列兩種位相：

(a) 緊開位相(compact-open topology)。這是合理的，因為$O(E)$

爲E的一族變換所組成，這個位相的一組子基（subbase）是由形如$W(K,U)=\{g\in O(E):gK\subseteq U\}$之集所構成的，其中$K$與$U$分別爲$E$的緊緻與開子集。

(b) 所謂的μ位相：對於每個$g\in O(E)$，對應的偶件g^*作用在E^*上並且（由下面定理5.1知）g^*保持了白噪聲的測度μ。因此我們可以建構單正算子U_g，定義爲$(U_g\varphi)(x)=\varphi(g^*x)$，$\varphi\in(L^2)$，$x\in E^*$。於是$\mu$位相定義爲使得$O(E)$的正則單正表現$(U_g,(L^2))$爲連續之最弱的位相。

容易證明，這兩種位相都會使$O(E)$成功一個位相群。

【註解】 當我們探討過本節之後，就會對μ位相有較清楚的了解。在本章之內，任選這兩種位相，並不會造成實質上的差異。

【定義5.2】

E的所有旋轉所構成的群$O(E)$，給予(5.1)之乘積定義，再賦予上述(a)或(b)之位相，就稱爲E的**旋轉群**。如果E沒有明白指出，我們就單稱爲**無窮維旋轉群**。

對於任意$g\in O(E)$及固定的$x\in E^*$，由定義5.1之(1)知，映射$\xi\to\langle x,g\xi\rangle$爲$E$上的連續線性泛函，因此存在有$E^*$的一個元素，記爲$g^*x$，使得

$$\langle x,g\xi\rangle=\langle g^*x,\xi\rangle. \tag{5.2}$$

映射$x\to g^*x$定義了E^*上的個自同構g^*，這是g的偶件，所有這種映射g^*的全體記爲$O^*(E^*)$，亦即

$$O^*(E^*)=\{g^*:g\in O(E)\}.$$

由(5.1)自然地誘生出$O^*(E^*)$的乘法運算，如下：

$$(g_1^*g_2^*)x=g_1^*(g_2^*x),\qquad g_1^*,g_2^*\in O^*(E^*). \tag{5.3}$$

在這個乘法運算之下，$O^*(E^*)$也變成一個群。

注意到$(g^*)^{-1}=(g^{-1})^*$，於是我們立即看出這兩個群的關係，如下：

【命題5.1】

將 $g \in O(E)$ 對應 $(g^*)^{-1} \in O^*(E^*)$ 之映射：

$$g \to (g^*)^{-1} \in O^*(E^*),$$

是 $O(E)$ 與 $O^*(E^*)$ 之間的一個代數同構。

由此可知，如果我們只討論代數構造的話，可以任取這兩個群之一。但是，我們還是寧可選取 $O(E)$，因爲 E 比 E^* 容易了解。在我們的研究裡，下面定理馬上會告訴我們 $O^*(E^*)$ 的重要性。事實上，$O^*(E^*)$ 很適當地描述了 μ 的性質，使得要研究白噪聲，幾乎不能缺少它！我們並不需要描述 $O^*(E^*)$ 的位相，我們只假設它有個位相構造，使得所成之位相群同構於 $O(E)$。

在此我們回想一下，我們在第3.2節所建構的可測空間 $(E^*, \mathfrak{B})$。

【定理5.1】

1. $O^*(E^*)$ 的任一元素 g^* 皆爲從 E^* 到自身的 $\mathfrak{B}$ 可測映射。
2. 如果我們定義乘積 $g^* \circ \mu$ 爲

$$g^* \circ \mu(B) = \mu(g^* B), \qquad B \in \mathfrak{B}, \tag{5.4}$$

則對所有 $g^* \in O^*(E^*)$，等式

$$g^* \circ \mu = \mu \tag{5.5}$$

成立，亦即 μ 在 $O^*(E^*)$ 之下是不變的。

【證明】

1. 如先前，令 $\mathfrak{A}$ 表示 E^* 的所有柱子集所成的類。由（5.2），我們有

$$g^*\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$$

對於任意 g^* 皆成立，其中 $g^*\mathfrak{A} = \{g^*A : A \in \mathfrak{A}\}$。因爲 g^* 爲 E^* 的一個同構，故 $g^*\mathfrak{B}$ 仍然爲一個σ-環，又因爲 $g^*\mathfrak{B}$ 包含 $\mathfrak{A} = g^*\mathfrak{A}$，故得知

$$g^*\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}.$$

今對$(g^*)^{-1}$亦有相同的結論，因此$g^*\mathfrak{B}=\mathfrak{B}$，亦即$g^*$爲$\mathfrak{B}$可測。

2. 讓我們來計算測度$g^*\circ\mu$的特徵泛函：

$$\int_{E^*} e^{i\langle x,\xi\rangle}\, dg^*\circ\mu(x)=\int_{E^*} e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\mu(g^*x)=\int_{E^*} e^{i\langle g^{*-1}x,\xi\rangle}\, d\mu(x)$$

$$=\int_{E^*} e^{i\langle x,g^{-1}\xi\rangle}\, d\mu(x)=\exp\left[-\frac{1}{2}\|g^{-1}\xi\|^2\right].$$

由定義 5.1 之條件(1)可知，上式最後一項跟μ的特徵泛函相同，又因爲在可測空間$(E^*,\mathfrak{B})$上的機率測度由其特徵泛函唯一決定，故我們已證明了(5.5)式。 #

先前我們提到過，而直到現在我們已經看出：對於$O^*(E^*)$〔或$O(E)$〕的任何研究，都會對測度μ產生用途。本章剩下來，我們要儘可能來研究群$O(E)$，這同時，會對μ產生間接的澄清作用。

直觀說來，$O(E)$是一個很大的群，並且在下一節我們將會看到，它具有非常豐富的構造。當然啦，它既不緊緻也不局緊。我們馬上要來研究$O(E)$的一些有趣的子群，同時考察所得結果對於研究白噪聲的理論所具有的意義。

5-2 旋轉群的子群

下面我們所討論的$O(E)$之子群，天然地分成兩類：〔I〕有限維旋轉群及其極限，〔II〕由時間變化所產生的E之旋轉子群。本節我們要很快地來描述這兩類子群。

I. 設g爲E的一個線性變換。如果存在有限維子空間$F\subset E$使得

(a) g局限到F，記爲g_F，爲F的一個直交變換，並且

(b) g局限到$F^\perp=\{\xi\in E:\xi\perp F\}$，記爲$g_{F^\perp}$，爲一單位映射，

則g屬於$O(E)$，並且稱爲一個**有限維旋轉**。

對於E的一個固定有限維子空間F，所有這些有限維旋轉所成的集合$G(F)$構成了$O(E)$的一個子群。如果F是n維的，則有

$$G(F)\cong O(n),\quad n\text{ 維直交群}$$

因此，對於任意n，都存在有$O(E)$的子群同構於n維旋轉群$SO(n)$。於是我們就可以考慮一列子群的極限（在適當意味之下），其第n個子群同構於$O(n)$。設$\{F_n\}$爲一列遞增之子空間：

$$F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n \subseteq F_{n+1} \subseteq \ldots,$$

其中F_n是n維的，於是對應有一列子群

$$G(F_1) \subseteq \cdots \subseteq G(F_n) \subseteq G(F_{n+1}) \subseteq \cdots$$

其中$G(F_n) \cong O(n)$，$\forall n \geq 1$。這列子群的極限G_∞：

$$G_\infty \equiv \lim_{n \to \infty} G(F_n) = \bigcup_1^\infty G(F_n) \tag{5.6}$$

變成$O(E)$的一個代數子群。我們不去仔細討論這個子群，因爲如果我們要討論G_∞在$O(E)$中的閉包，或討論由G_∞在$O(E)$中所產生的位相子群，我們必須先取定E的位相。顯然，子群G_∞跟序列$\{F_n\}$的取法有關，因此當我們要討論G_∞時，比較方便的做法是，事先在$L^2(\mathbf{R})$中取定一個完備么正系統$\{\xi_n\} \subseteq E$，然後令F_n爲由$\{\xi_i : 1 \leq i \leq n\}$所生成。

P. Lévy（1951，part III，第36-37節）在研究 Hilbert 空間$L^2([0,1])$上的泛函時，引入了$L^2([0,1])$的坐標之置換群。在他的心底，無疑地，必是測度（如μ）之擂台，使得坐標的置換受到嚴厲的限制。由 Lévy 的探討裡，我們取出一個例子，可以用類似於$O(E)$的子群G_∞來看待，我們現在就來做這件工作。

【例 1】

我們取基本的核式空間爲第A.3節例1中所述的$\mathscr{D}(\pi)$。我們也取（A.12）所給的完備么正系統$\{\xi_k : k \geq 1\}$。由簡單計算可以證明$\{\xi_k\}$可以重新排列，使得對每個n，$\|\xi_k\|_n$爲k之非遞降數列。

假設$\pi = \{\pi(n)\}$爲正整數的一個置換，滿足下面的條件：

$$(*)\ \begin{cases} \text{存在正整數的一個數列}\ \{n_p : p \geq 1\}, \\ n_1 = 1\ \text{，使得}\ \lim_{p \to \infty}(n_{p+1}/n_p) = 1\ \text{，並且由} \\ n_p \leq k < n_{p+1}\ \text{可得}\ n_p \leq \pi(k) < n_{p+1}\text{。} \end{cases}$$

任何一個這種置換 π，定義了一個變換 g_π，如下：

$$\xi=\sum_1^\infty a_k\xi_k\to g_\pi\xi=\sum_1^\infty a_k\xi_{\pi(k)},\quad \xi\in\mathscr{D}(\pi). \tag{5.7}$$

顯然 g_π 是線性的，並且滿足條件

$$\|g_\pi\xi\|=\|\xi\|.$$

我們要以下述方式來證明 g_π 之連續性。由假設可知，比值 n_{p+1}/n_p 具有上界，亦即存在一個常數 C，使得對任意 p，$n_{p+1}/n_p\le C$。因此對任意 n，我們有

$$\begin{aligned}\|g_\pi\xi\|_n^2&=\sum_{p=1}^\infty\sum_{k=n_p}^{n_{p+1}-1}a_k^2\|\xi_{\pi(k)}\|_n^2\\&\le\sum_{p=1}^\infty\sum_{k=n_p}^{n_{p+1}-1}a_k^2\|\xi_{n_{p+1}}\|_n^2\\&\le C_n\sum_{p=1}^\infty\left(\frac12 n_{p+1}\right)^{2n}\sum_{k=n_p}^{n_{p+1}-1}a_k^2\\&\le C^{2n}C_n\sum_{p=1}^\infty\left(\frac12 n_p\right)^{2n}\sum_{k=n_p}^{n_{p+1}-1}a_k^2\\&\le D_n\|\xi\|_n^2\end{aligned}$$

其中 C_n 爲一常數只跟 n 有關，見（A.13）

其中 D_n 爲另一個只跟 n 有關的常數。這就證明了 g_π 在 $\mathscr{D}(\pi)$ 上之連續性。

令 π^{-1} 爲置換 π 之逆，則 π^{-1} 亦滿足條件（*），因此 $g_{\pi^{-1}}$ 亦連續。進一步我們可以證明

$$g_\pi^{-1}=g_{\pi^{-1}}.$$

因此 g_π 爲 $O(\mathscr{D}(\pi))$ 的一個元素，並且對於固定的一列正整數列 $\{n_p\}$，集合

$$G_{\{n_p\}}=\{g_\pi:\pi \text{ 使得由 } n_p\le k<n_{p+1} \text{ 可得 } n_p\le\pi(k)<n_{p+1}\}$$

爲 $O(\mathscr{D}(\pi))$ 的一個代數子群，同構於直積 $\Pi_{p=1}^\infty\mathfrak{S}_{(n_p,n_{p+1})}$，其中 $\mathfrak{S}_{(n_p,n_{p+1})}$ 表示區間 $[n_p, n_{p+1})$ 中的整數之置換群。

我們也可以設計其它類型的坐標置換，但是我們不再探討下去，因爲我們的目標只在於顯示如G_∞的子群跟(L^2)上的泛函分析學之直接關連，也可參見第5.7節。

【註解】 值得注意的是，兩個子群G_∞與$G_{(n_p)}$具有先天內在上的區別，可以用“方均”來描述。如果我們令

$$\gamma(x, g) = \limsup_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{1}^{n} \langle x, \xi_k - g\xi_k \rangle^2$$

則我們發現，若$g \in G_\infty$，則$\gamma(x, g) = 0$，殆遍，但是存在$g \in G_{(n_p)}$使得$\gamma(x, g) = 2$，殆遍。例如，我們可以取$g = g_\pi$，其中π爲$(n_p, n_p+1, \cdots, n_{p+1}-1)$，$p \geq 1$，的循環置換之乘積。

II. 當白噪聲的測度μ定義在空間E^*時，每一元素$x \in E^*$可視爲Wiener過程之樣本路徑$W(t)$對時間的導微$W'(t)$。現在我們的興趣在於x的線性變換，這對應於$W'(t)$的時間參數t之尺度變更。這個變換自然地必須要求爲E^*（即$W'(t)$的所有樣本函數空間）的自同構，再利用典型的雙線性形式$\langle x, \xi \rangle$，我們可以將它們看作是$\xi \in E$的線性變換來討論。

假設新的時間尺度用一個單調實值函數$\psi(u)$，$u \in \mathbf{R}$來表示，則尺度變化可以記成$\xi(u) \to \xi(\psi(u))$。但是爲了μ在E^*的誘導變換下是不變的，我們必須再加進一個因子。事實上，我們必須考慮

$$\xi(u) \to \xi(\psi(u)) \cdot |\psi'(u)|^{1/2}. \tag{5.8}$$

有關這方面的論題與背景知識可以參考H. Sato（1971）。有了因子$|\psi'(u)|^{1/2}$，我們就可看出ξ的$L^2(\mathbf{R})$範數是不變的，從而特徵泛函$C(\xi) = \exp[-\frac{1}{2}\|\xi\|^2]$的值也是不變的。如果經過變換後的函數仍屬於$E$，並且如果這個變換爲一連續自同構，則在$E^*$上誘生的變換就會保持測度$\mu$不變。

由這些觀察就產生要研究$O(E)$中定義如(5.8)之元素。$\psi(u)$的選取必須跟E的構造相容，或是更重要地，必須儘可能具有機率意義。事實上，$O(E)$擁有一些一參數子群含有這種有趣的時間尺度之變換。下面三

節我們就要來研究這些一參數子群。我們的取向是偏向直觀而不是系統性的討論。

現在我們允許函數 ψ 跟參數 t 有關，$-\infty < t < \infty$，記成 $\psi_t(u)$，並且由它所定義的 ξ 之變換記成 g_t：

$$(g_t\xi)(x) = \xi(\psi_t(u))\cdot|\psi_t'(u)|^{1/2}, \qquad \psi_t'(u) = \frac{\partial}{\partial u}\psi_t(u). \tag{5.9}$$

$\{g_t: -\infty < t < \infty\}$ 構成一參數群

$$g_t g_s = g_{t+s}, \qquad -\infty < t, s < \infty,$$
$$g_0 = I \qquad (\text{單位映射})$$

的要求，可以用 ψ_t 表成：

$$\begin{cases} \psi_s(\psi_t(u)) = \psi_{t+s}(u), & -\infty < t, s < \infty \\ \psi_0(u) = u. \end{cases} \tag{5.10}$$

下面的例子，稱為"移位"，是 $O(E)$ 的這種一參數子群的典型。

【例 2】

移位 $\{S_t\}$。如果我們取

$$\psi_t(u) = u - t, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{5.11}$$

則 ψ_t 滿足（5.10）。以這個 ψ_t 用（5.9）式定義的 g_t 記成 S_t，故 $\{S_t: -\infty < t < \infty\}$ 恰好是第 3.3 節所引進的移位（shift）。如我們在那裡所證明的，若取空間 E 為 $\mathscr{S}$，則 $\{S_t\}$ 就是 $O(\mathscr{S})$ 的連續一參數子群。同理，對於 $E = D_0$ 的情形亦成立（如第 A.3 節裡的記號）。雖然移位是最簡單的的一參數子群，以後我們將發現這也是最重要的子群。

回到一般情形，我們現在要來尋找這種 $\{\psi_t\}$ 的公式。因為 $\psi_t(u)$ 表示時間尺度的一族變化，我們可以合理地假設(a) $\psi_t(u)$ 對 t 與 u 是嚴格單調的，並且(b) $\psi_t(u)$ 對 u 是連續的。在這兩個假設下，$\psi_t(u)$ 可以寫成（參見 J. Aczél（1966））

$$\psi_t(u) = f(f^{-1}(u) + t), \tag{5.12}$$

其中 f 爲 $(-\infty, \infty)$上的嚴格單調函數，並且唯一決定至可差個常數。直觀說來，(5.12)是說 ψ_t 與移位是共軛的，並且以 $f(u) = -u$ 之移位本身，在所有這種 ψ_t 中佔有中心地位。我們利用(5.12)式，把$\{g_t\}$的條件(5.9)，以函數 f 表成$O(E)$的一參數子群，當然所有這些都跟基本的核式空間E的構造有關。下一節的一參數子群將展示出這些觀念，並且描述出Brown運動的一些深刻性質。

5-3 投影變換群

本節的目標是要來找尋，在前節歸類爲[II]，$O(E)$之子群。這些子群我們不只要個別處理，也要聯合起來處理，並且扮演居間關係這個重要角色的移位也要加以研究。每一子群的機率解釋，以後將給出，至於它們如何被發現的過程，這些可參見第8節，T. Hida (1970b)，以及T. Hida, I. Kubo, H. Nomoto及H. Yoshizawa (1968)。

取(5.12)式，由 ψ_t 所定義的一參數子群$\{g_t\}$，令其母算子爲 α：

$$\frac{d}{dt} g_t \bigg|_{t=0} = \alpha,$$

其中作導微時我們採用強收斂之位相。母算子 α 爲一個一階微分算子，牽涉到(5.12)式中的 f。事實上，如果我們以 d/dt 作用到(5.12)，並且令 $t=0$，再置

$$a(u) = \left\{\frac{d[f^{-1}(u)]}{du}\right\}^{-1} (= f'[f^{-1}(u)]),$$

則 α 可以表成下形

$$\alpha = a(u)\frac{d}{du} + \frac{1}{2}a'(u).$$

對於移位我們有 $a(u) \equiv -1$，並且記其母算子爲 s：

$$s = -\frac{d}{du}.$$

要描述移位與其它一參數子群的關係，一個辦法是利用它們的母算子之間的交換關係。對於一般的 α 與 s，其交換子 $[\alpha, s] = \alpha s - s\alpha$ 爲

$$[\alpha, s] = a'(u)\frac{d}{du} + \frac{1}{2}a''(u). \tag{5.13}$$

我們先由 (5.13) 的可能特例探討起。

1. $[\alpha, s] = 0$

這等價於 $a'(u) \equiv 0$，亦即 $a(u) = c$（常數），因此

$$\alpha = -cs.$$

對於這種情形，α 基本上跟移位的母算子相同。

2. $[\alpha, s] = \lambda s$，λ 爲一常數。

我們再次利用 (5.13) 得到 $a(u) = -\lambda u + d$，d 爲一常數。因爲我們可以自由選取 α 模 s，故常數 d 可以取爲 0。因此我們考慮

$$\alpha = -\lambda u\frac{d}{du} - \frac{1}{2}\lambda.$$

解此方程式我們得到 $a(u)^{-1} = \{f^{-1}(u)\}' = -1/\lambda u$。於是若 $u > 0$ 且 c 爲一正的常數，則

$$f^{-1}(u) = -\lambda^{-1}\log\left(\frac{u}{c}\right).$$

但是由此可得

$$f(u) = c\cdot\exp[-\lambda u], \qquad u > 0.$$

因此

$$\psi_t(u)=c\cdot\exp\left\{-\lambda\left\{-\lambda^{-1}\log\left(\frac{u}{c}\right)+t\right\}\right\}$$
$$=u\exp[-\lambda t],\qquad u>0.$$

這最後的表式對於 $u\leq 0$ 亦有意義；事實上，在這個情況下，上述討論只需在某些中間步驟修改一下，就可以得到相同的表式。由這個 $\psi_t(u)$ 所定義的 E 之變換將記成 τ_t：

$$\tau_t\xi(u)=\xi(ue^{-\lambda t})e^{-\lambda t/2}. \tag{5.14}$$

因此我們就得到 E 上的一參數群 $\{\tau_t:-\infty<t<\infty\}$，稱爲膨脹群或張力群（dilation or tension group）。爲了簡便起見，以下我們皆取 $\lambda=-1$，而相應的母算子記爲 τ，可表成

$$\tau=u\frac{d}{du}+\frac{1}{2}.$$

交換關係 $[\tau, s]=-s$ 很容易就可以得到，並且由此可得下面有關相應子群之間的關係：

$$S_t\tau_s=\tau_s S_{t\exp[s]}.$$

換言之，$\{S_t\}$ 橫貫過 $\{\tau_t\}$。

3.　$[\alpha, s]=\mu\alpha$，α 爲一常數。

由此關係可以得到 $a'(u)=\mu a(u)$，從而得到 $f^{-1}(u)=-c\mu^{-1}\exp[-\mu u]+c'$，但是在這種情形之下的函數 $f(u)$ 並不定義一個 $\psi_t(u)$ 將 $(-\infty, \infty)$ 映至自身。

讓我們稍微改變一下觀點，專注於 τ。τ 與一般的 α 之間的交換關係爲

$$[\tau,\alpha]=\{ua'(u)-a(u)\}\frac{d}{du}+\frac{1}{2}ua''(u),$$

並且可能的特殊情形有：

1. $[\tau, \alpha] = 0,$
2. $[\tau, \alpha] = \lambda s,$
3. $[\tau, \alpha] = \mu\tau,$
4. $[\tau, \alpha] = \nu\alpha,$

其中 λ ，μ 及 ν 皆爲非零常數。對於(1)到(4)的情形，我們只敍述出最後的結果，而不給出證明。

除了無聊解答之外，滿足(1)之唯一 α 爲 $\alpha = c\tau$ ，其中 c 爲一常數。

對於(2)的情形，我們發現 α 爲 s 模 τ 之常數倍，沒有新的母算子會出現。

對於(3)的情形，並無適當的解答。

最後，(4)式給出了下式

$$\alpha = u^{\nu+1}\frac{d}{du} + \frac{1}{2}(\nu + 1)u^{\nu},$$

這是利用 τ 所曾發現的唯一母算子。它滿足下面的交換關係

$$[\alpha, s] = (\nu + 1)\left\{u^{\nu}\frac{d}{du} + \frac{1}{2}\nu u^{\nu-1}\right\}.$$

考慮大括號 $\{\cdot\}$ 中的表式告訴我們一族包含 s ，τ ，α 的母算子在交換子之乘積運算下具有封閉性這個觀念。事實上，如果我們取 $\nu = 1$ ，並且引進

$$\kappa = u^2\frac{d}{du} + u,$$

則我們發現 $[\kappa, s] = 2\tau$ 。我們也發現到，κ 爲定義如下之一參數群 $\{\kappa_t\}$ 之母算子：

$$(\kappa_t\xi)(u) = \xi\left(\frac{u}{-tu+1}\right)|-tu+1|^{-1}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{5.16}$$

在這個情形之下，(5.12)中之 f 是不連續的。

到現在爲止我們只考慮了母算子之間的代數關係，以下我們就來研究

具有這些母算子的一參數群。爲此，我們取基本的核式空間E爲第A.3節例3所引進且討論的空間D_0。

【命題5.2】

設$E=D_0$，則$\{S_t\}$，$\{\tau_t\}$及$\{\kappa_t\}$均爲$O(D_0)$的一參數連續子群，並且它們的母算子滿足下面的交換關係：

$$[\tau, s] = -s,$$
$$[\tau, \kappa] = \kappa, \tag{5.17}$$

以及

$$[s, \kappa] = -2\tau.$$

所有的斷言都已證明了，除了有關$\{\kappa_t\}$之外，但這由(5.16)式立即可得證。 #

今令母算子$\{s, \tau, \kappa\}$張成一個向量空間$\mathfrak{R}$，以$\mathbf{R}$爲係數，再對$\mathfrak{R}$引進乘積$[\cdot,\cdot]$，這就構成了一個Lie代數。(5.17)的交換關係顯示了$\mathfrak{R}$同構於線性Lie群$PGL(2, \mathbf{R})$之Lie代數。這個事實並不是偶然的，我們可以考慮下面從$GL(2, \mathbf{R})$到$O(D_0)$的映射而得知。對於$GL(2, \mathbf{R})$的一個元素$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，我們定義$\xi$的一個映射$g_X$爲

$$(g_X\xi)(u) = \xi\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)\cdot\frac{|X|^{1/2}}{|cu+d|}, \tag{5.18}$$

其中$|X|$表示X的行列式之絕對值。如同我們已看過的$\{\kappa_t\}$的情形，我們可以證明，對於每個$X\in GL(2, \mathbf{R})$，g_X屬於$O(D_0)$。進一步，映射

$$X \to g_X \in O(D_0) \tag{5.19}$$

爲一同胚，其核爲$GL(2, \mathbf{R})$之中心。因此我們得到

【命題5.3】

由$\{S_t\}$，$\{\tau_t\}$及$\{\kappa_t\}$所產生的$O(D_0)$之子群G_p，在(5.19)的映射下，同構於$PGL(2, \mathbf{R})$。

【觀察】 $GL(2,\mathbf{R})$ 模中心所成的因子群，其一般元素可以表成乘積

$$\zeta(t)\delta(u)z(v) \quad 或 \quad s\zeta(t)\delta(u)z(v),$$

其中

$$\zeta(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \delta(u)=\begin{pmatrix}e^{u/2} & 0\\ 0 & e^{-u/2}\end{pmatrix}, z(v)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ v & 1\end{pmatrix} \quad 且 \quad s=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

在我們的記號之下，S_t，τ_t 與 κ_t 分別對應到 $\tau(-t)$，$\delta(t)$ 與 $z(-t)$。

5·4 Brown 運動的投影不變性

本節的目標我們要來考察命題 5.3 裡子群 G_p 之機率意義，以及生成 G_p 的三個一參數子群。特別地，Brown 運動的投影不變性可以用 G_p 來描述。

給定 $O(E)$ 的一參數子群 $\{g_t\}$，根據定理 5.1，我們可以 (E^*,μ) 上建構出一參數保測變換群 $\{g_t^*\}$。

首先，讓我們考慮移位 $\{S_t\}$。我們在第 4.4 節已討論過，$\{S_t^*\}$ 為 Brown 運動的“流”，雖然在那裡我們是在一般的 E^* 上考慮的。為了下面要跟其它的流作對照，讓我們很快地來複習有關 $\{S_t^*\}$ 的一些性質。對於每個 $\xi\in E$，典型的雙線性形式 $\langle x,\xi\rangle$ 在 (E^*,μ) 上定義了一個 Gauss 型隨機變數，這是當 $\xi\in L^2(\mathbf{R})$ 的情形之推廣。對於 $\xi\in L^2(\mathbf{R})$，隨機變數 $\langle x,\xi\rangle$ 的平均值為 0，變異數為 $\|\xi\|^2$。今若取 ξ 為示性函數 $\chi_{[t\wedge 0,t\vee 0]}$，則 Gauss 系統

$$\{\langle x,\chi_{[t\wedge 0,\,t\vee 0]}\rangle \equiv W(t,x):\ -\infty<t<\infty\} \tag{5.20}$$

可以被證明為是一個 Brown 運動，以 $(-\infty,\infty)$ 為時間參數空間。當 $b>a$ 時，取增分 $W(b,x)-W(a,x)$，再令 S_t^* 作用到 x，就得知下式殆遍成立：

$$W(b,S_t^*x)-W(a,S_t^*x)=W(b+t,x)-W(a+t,x).$$

在這個意味下，$\{S_t^*\}$ 可視為誘生出 Brown 運動的增分之時間推移，因此（參見第 4.4 節定義 4.3）它也稱為 Brown 運動的“流”。

今我們轉到 $\{\tau_t^*\}$，如果我們記

$$U(t, x) = \langle \tau_t^* x, \chi_{[0,1]} \rangle, \quad -\infty < t < \infty, \tag{5.21}$$

則 $\{U(t, x) : -\infty < t < \infty\}$ 爲機率空間 (D_0^*, μ) 上的一個定常Gauss過程，其平均值顯然爲 0，其協方差（covariance）函數爲

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \int_{D_0^*} U(t+h, x) U(t, x)\, d\mu(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[t + \frac{1}{2}h\right] \chi_{[0,1]}(u \exp[t+h]) \chi_{[0,1]}(u \exp[t])\, du \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}|h|\right].\end{aligned}$$

因此我們看出，$\{U(t)\}$ 爲第 4.6 節 [4] 例 1 所介紹的Ornstein-Uhlenbeck 過程，故 $\{\tau_t^*\}$ 稱爲此過程的流。

在討論流 $\{\kappa_t^*\}$ 所扮演的角色之前，我們需要一些進一步的背景知識。對於固定的閉區間 $[a, b] \subset [0, \infty)$，我們引進一族 $u \in (a, b)$ 的函數，以 t 爲參數，並且 t 在相同區間 (a, b) 內變動：

$$f(u; t) = \frac{|b-t|^{1/2}}{|t-a|} \cdot \chi_{[a,t]}(u) \cdot \frac{(b-a)^{1/2}}{b-u}, \qquad a < t < b.$$

其次，令 $X \in GL(2, \mathbf{R})$ 定義 (a, b) 到自身的一個投影變換：

$$X : t \to X(t) \in (a, b),\ X(a) = a,\ X(b) = b, \qquad t \in (a, b). \tag{5.22}$$

由（5.18）所定義的變換 g_X，可延拓到 $L^2(\mathbf{R})$ 上。明乎此，我們就可以看出

$$g_X f(u; t) = f(u; X^{-1}(t)). \tag{5.23}$$

進一步，由於 $g_X \in \mathcal{O}(D_0)$，故下面定理就可以被證明了。

【定理 5.2】（Brown 運動的投影不變性）

對於一個滿足（5.22）之投影變換 X，下面兩個Gauss過程相等：

a. $\{\langle x, f(\cdot\,; t)\rangle : a < t < b\}$,
b. $\{\langle x, f(\cdot\,; X^{-1}(t))\rangle : a < t < b\}$.

對於這個結果我們要給出另一個直接而有意思的證明，不過我們不必用到群$O(D_0)$。這兩個Gauss過程的平均值都是零，並且(b)過程的協方差爲

$$\begin{aligned}
&\int_{D_0} \langle x, f(\cdot, X^{-1}(t))\rangle \langle x, f(\cdot, X^{-1}(s))\rangle \, d\mu(x) \\
&= \int_a^b f(u, X^{-1}(t)) f(u, X^{-1}(s)) \, du \\
&= (a, b; X^{-1}(s \wedge t), X^{-1}(s \vee t))^{1/2},
\end{aligned}$$

其中$(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)$表示非調和比值。因爲$X^{-1}$也是一個投影變換，非調和比值在$X^{-1}$之下是不變的，故最後一個表式等於$(a, b; s\wedge t, s\vee t)^{1/2}$。今$f(\cdot, t)$與$f(\cdot, s)$的內積是過程(a)的協方差函數，它也等於$(a, b; s\wedge t, s\vee t)^{1/2}$，這就證明了我們的定理。 #

【觀察】 取Brown橋$X(t)=X^{(b;0)}_{(a;0)}(t)$［第2.6節［3］］，在$t=a$與$t=b$等於0，並且作正規化，在每一時點$t$，再除以$X(t)$的標準偏差。這些所得的Gauss過程$\{Y_{a,b}(t); a<b<b\}$，具有跟上述(a)，(b)過程相同的協方差函數。這表示，如果我們應用時間參數t的投影變換到$\{Y_{a,b}(t)\}$，我們仍然得到相同的過程。這個結果是Brown運動較重要的一個性質，我們在第2.6節稱之爲投影不變性(projective invariance)。詳細內容請讀者參閱T. Hida, I. Kubo, H. Nomoto及H. Yoshizawa (1968)。

下面我們給出四個註解。

【註解1】 定理5.2的敍述告訴我們的不止是兩個Gauss過程具有相同的分佈。事實上，它證明了任一個過程都可以被D_0^*上的保測變換g_X^*或g_X^{*-1}變換成另一個過程。

【註解2】 必須注意，爲了描述定理5.2意味下的投影不變性，g_X必須

落在由 { S_t } 與 { τ_t } 所生成的 $O(D_0)$ 之子群之外。換言之，在利用 D_0 的旋轉來描述投影不變性時，牽涉到 { κ_t } 的整個子群 G_p 扮演一個很重要的角色。

【註解3】 一個有意思的未解決問題是，找尋 $O(D_0)$ 的其它子群及其相應的機率解釋，但不用第5.3節建基於移位 { S_t } 之直觀方法。特別地，我們必須把注意力局限到有限維Lie 群的情形，因爲這樣就可以應用有力的群論技巧了。

【註解4】 讀者應注意到，第2.3節[1]所述之Brown 運動之建構，大大地根據於定理5.2所建立的性質。

5·5 一參數子群的値譜類型

本節我們要來證明，至今（第5.3，5.4節）所討論的 $O(D_0)$ 之三個一參數子群，它們所誘生出的流都具有可列Lebesgue 値譜（countable Lebesgue spectrun）。

再複習一下，對於白噪聲在測度空間 $(D_0^*, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的移位 { S_t : $-\infty < t < \infty$ } 取偶件 $T_t = S_t^*$，就得到Brown 運動的流 { T_t : $-\infty < t < \infty$ } 了。在第4.4節我們已看過，{ T_t } 爲一個Kolmogorov 流，因此根據Sinai 有關於流的一般理論的一個定理（見Ya.G.Sinai（1961））可知，{ T_t } 具有可列Lebesgue 値譜。對於我們的情形，由於 { T_t } 已經很明確地給出，故可以給出一個具體證明。

任何有關値譜類型的討論，單直群的Hahn-Hellinger 定理是一個關鍵定理，因此我們就由此談起，參見K.Yosida（1951）第6.8節。在機率空間 $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 上給一個流 { T_t : $-\infty < t < \infty$ }，我們在 $L^2(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 上定義一個一參數單直算子群 { U_t : $-\infty < t < \infty$ } 如下：

$$(U_t f)(\omega) = f(T_t \omega), \qquad f \in L^2(\Omega, \mathbf{B}, P). \tag{5.24}$$

如果 { U_t } 對 t 具有強連續性，則由週知的M.H.Stone 定理，我們就有値譜分解公式

$$U_t = \int e^{it\lambda}\, dE(\lambda), \tag{5.25}$$

其中 $\{E(\lambda); -\infty<\lambda<\infty\}$ 爲 $\mathcal{A}$ 之分解，亦即 $\{E(\lambda)\}$ 爲 $L^2(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 上的投影算子滿足

1. $E(\lambda)E(\mu)=E(\lambda\wedge\mu)\ (=E(\mu)E(\lambda))$；
2. $s\text{-}\lim_{\lambda\to\mu+0} E(\lambda)=E(\mu)$
3. $E(-\infty)=0$，零算子，並且 $E(\infty)=I$。

現在我們就可以來敍述出Hahn-Hellinger定理，給出一般可列分Hilbert 空間H上的一般單直算子群〔不必形如（5.24）〕之單直不變性。假設U_t具有形如（5.25）之値譜分解。

【定理5.3】（Hahn-Hellinger定理）

1. 在H中存在一列元素$\{f_n\}$使得Hilbert空間H具有直和分解

$$\mathbf{H} = \sum_{n\geq 1} \oplus \mathbf{H}_n, \tag{5.26}$$

其中

$$\mathbf{H}_n = \left\{\int g(\lambda)\, dE(\lambda) f_n : g \in L^2(\mathbf{R}, d\rho_n)\right\}, \tag{5.27}$$

並且

$$\rho_n(\lambda) = \|E(\lambda) f_n\|^2,$$

又 $\mathbf{R}$ 上的測度 $\{d\rho_n\}$ 是非遞增的：

$$d\rho_1 \gg d\rho_2 \gg \cdots \tag{5.28}$$

2. 序列$\{d\rho_n\}$的類型跟序列$\{f_n\}$的選法無關。

【註解1】 由於（5.27）式之子空間H_n跟$\{U_t f_n; -\infty<t<\infty\}$所生成的閉子空間相同，故稱$H_n$爲一個循環子空間，而$f_n$稱爲一個循環向量。

【註解2】 定理5.3之敍述(2)應這樣了解：如果$H=\Sigma_{n\geq 1}\oplus H_n'$爲另一個分解，其中$H_n'$爲一循環子空間，具有循環向量$f_n'$，則

$$d\rho_n \sim d\rho_n' \qquad (\text{等價})，\forall n$$

其中$\rho_n'(\lambda)=\|E(\lambda)f_n'\|^2$。

【註解3】 在(5.26)的分解式中，循環子空間的個數可能有限或可列無限。

【註解4】 如果我們令P_n表示H到H_n的投影算子，則

$$U_tP_n=P_nU_t.$$

定理5.3的一個立即結論是

【推論】 存在一個從H到$\Sigma_{n\geq 1}\oplus L^2(\mathrm{R},d\rho_n)$的保距映射$V$使得

$$V\mathrm{H}_n=L^2(\mathrm{R},d\rho_n),$$
$$(VU_tV^{-1}g)(\lambda)=e^{i\lambda t}g(\lambda), \qquad g\in L^2(\mathrm{R},d\rho_n).$$

作爲上述定理的進一步推論，我們給出下面的斷言。如果$\{U_t\}$與$\{U_t'\}$分別爲H與H'上的一參數單直算子群，若它們是單直等價的，即存在一個保距映射$V:H\to H'$使得$U_t'=VU_tV^{-1}$，則相應的測度序列$\{d\rho_n\}$與$\{d\rho_n'\}$之類型相同。反過來。若這兩個序列具有相同的類型，則我們可以建構一個保距映射，使得$\{U_t'\}$與$\{U_t\}$單直等價。換言之，序列$\{d\rho_n\}$是單直不變的(unitary invariant)。

令測度$d\rho_n$的擔台記爲Λ_n[集Λ_n跟H的分解(5.26)無關]。整數$m(\lambda)=\max\{n:\lambda\in\Lambda_n\}$稱爲$\lambda$的重數(multiplicity)，如果我們簡記最大的測度$d\rho_1$爲$d\rho$，則稱$\{\rho,m\}$爲$\{U_t\}$的値譜類型。現在我們看出，單直等價類之一參數單直群$\{U_t\}$與其値譜類型之間存在有一個對射關係，亦即對這種群我們可以作分類。

回到流來，我們可以定義$\{T_t\}$的値譜類型爲(5.24)所定義的$\{U_t\}$之値譜類型，並且也可以同理定義流的等價性。說得明白一點，兩個流

$\{T_t\}$ 與 $\{T'_t\}$ 稱爲値譜等價，若它們所定義的相應一參數單直群 $\{U_t\}$ 與 $\{U'_t\}$ 具有相同的值譜類型。現在我們來舉出一些典型的值譜類型之例子。如果 $d\rho$ 等價於 Lebesgue 測度並且 $m(\lambda)\equiv\infty$，則稱流 $\{T_t\}$ 的值譜類型爲可列Lebesgue 型，或 σ-Lebesgue 型。同理，若 $d\rho$ (等價於) Lebesgue 測度，但 $m(\lambda)\equiv 1$，則其值譜類型稱爲**單純型** (Simple Lebesgue)。另一種重要的特例，是 $d\rho$ 爲離散的情形，此時稱爲**離散值譜或純點值譜**。

有了這些了解，我們再回到 Brown 運動的流 $\{T_t\}$，亦即對於白噪聲測度空間上的移位 $\{S_t\}$，令 $T_t=S_t^*$，所得者。

【定理 5.4】

在白噪聲測度空間 $(D_0^*, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的 Brown 運動之流，其值譜類型爲 Hilbert 空間 $(L^2)\ominus\{1\}$ 上的可列Lebesgue 型，此地之 $(L^2)\ominus\{1\}$ 是指：在 (L^2) 中之常函數所成的一維空間之直交補空間。

【證明】 定義 U_t 爲 $(U_t\varphi)(x)=\varphi(T_tx)$，$\varphi\in(L^2)$，讓我們在空間 $(L^2)\ominus\{1\}$ 上求 $\{U_t\}$之值譜類型。由於值譜類型具有單直不變性，故我們可以改求Hilbert 空間(見(4.22))

$$\sum_{n=1}^{\infty}\oplus(n!)^{1/2}\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)\left[\cong(L^2)\ominus\{1\}=\sum_{n=1}^{\infty}\oplus\mathscr{H}_n\right],$$

上的單直算子群 $\{V_t\}$ 之値譜類型，其中 $V_t=\mathscr{T}U_t\mathscr{T}^{-1}$。注意到，$V_t$ 的作用如下：

$$V_tF(u_1,u_2,\ldots,u_n)=F(u_1-t,u_2-t,\ldots,u_n-t),\qquad F\in\hat{L}^2(\mathbf{R}^n),$$

並且 $-\infty<t<\infty$ (見第 4.4 節)。

因爲 $V_t\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)=\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$，故只需知道 V_t 在 $\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$，$n\geq 1$，上的值譜類型就好了，在此我們把 V_t 局限到此空間時仍用相同的記號來代表。

如果 $n=1$，並且若我們取一個 $F\in L^2(\mathbf{R})$ 使得其Fourier變換 $\hat{F}$ 殆遍不等於 0，則 $\{e^{i\lambda t}\hat{F}(\lambda):-\infty<t<\infty\}$ 張成整個 $L^2(\mathbf{R})$。取 Fourier 變換，我們於是看出，由 $\{F(u-t):-\infty<t<\infty\}$所張成的

閉子空間亦等於 $L^2(\mathbf{R})$ 。注意到

$$(V_tF)(u) = F(u-t) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\lambda}\{e^{i\lambda t}\hat{F}(\lambda)\}\,d\lambda,$$

我們看出 F 爲一個循環向量，並且 $L^2(\mathbf{R})$ 本身爲一個循環（子）空間。進一步，跟（5.27）式作比較，我們發現 $d\rho$ 爲 Lebesgue 測度的某常數倍，故其值譜類型爲 $L^2(\mathbf{R})$ 上的單純 Lebesgue 類型。

對於所有 $n \geq 2$ 的情形，其討論步驟都相仿，故爲了簡便起見，我們只討論 $n = 2$ 的情形。方程式

$$V_tF(u_1, u_2) = F(u_1 - t, u_2 - t), \qquad F \in L^2(\mathbf{R}^2)$$

我們已經知道了，又因爲 F 是對稱的，故我們可局限專注於半平面，比如 $u_1 \geq u_2$ 。如果我們引進變數變換

$$v_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2),\ v_2 = u_1 - u_2 \geq 0 \tag{5.29}$$

並且令 $F(u_1, u_2) = \tilde{F}(v_1, v_2)$ ，則有

$$(V_t\tilde{F})(v_1, v_2) = \tilde{F}(v_1 - t, v_2). \tag{5.30}$$

利用完備么正系統 $\{\eta_n : n \geq 1\}$ 於 $L^2([0, \infty))$ ，那麼定義在上半平面 $v_2 \geq 0$ 上的平方可積分函數所成的Hilbert空間 $L^2(\mathbf{R}^2_+)$ ，就可以表成下面的直和分解

$$L^2(\mathbf{R}^2_+) = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus L_n, \tag{5.31}$$

其中 $L_n = \{f(v_1)\eta_n(v_2) : f \in L^2(\mathbf{R})\}$ 。利用（5.30）之性質，則 V_t 在 L_n 上的作用可以表成 $V_t(f \otimes \eta_n)(v_1, v_2) = f(v_1 - t)\eta_n(v_2)$ 。顯然，$V_tL_n = L_n$ ，故當它局限到 L_n 上時，V_t 的作用恰好跟上述 $n = 1$ 的情形一樣。說得更詳細一點，取 f 使得 $\hat{f}(\lambda) \neq 0$ ，殆遍，則 $\{V_t(f \otimes \eta_n) : -\infty < t < \infty\}$ 張成 $L^2(\mathbf{R}^2_+)$ 的一個子空間，跟 L_n 一致。函數 $f \otimes \eta_n$ 爲循

環子空間L_n的一個循環向量，並且$d\rho$等價於Lebesgue測度。今如(5.31)所述，$L^2(\mathbf{R}_+^2)$可表成可列無窮多個這種循環子空間L_n之直和，故$\{V_t\}$的值譜類型爲$\hat{L}^2(\mathbf{R}^2)$上的可列Lebsgue型。

上述的證明很容易可以推廣到$n>2$的情形，我們只注意推廣(5.29)式之變數變換就夠了。例如，我們可以取$v_1=n^{-1}\Sigma_1^n u_j$，而其它變數v_2，v_3，⋯，v_n取使得它們在移位$u_j'\to u_j-t$，$j=1,2,\cdots,n$，之下不變並且使得Jacobi行列式$\partial(v_1,\cdots,v_n)/\partial(u_1,\cdots,u_n)$恒等於1或－1。因此定理就證明完畢了。 #

由上述結果再加上值譜測度是連續的事實，馬上得到$\{T_t\}$具有弱混合性(weakly mixing property)。對於任意$\varphi(x)$，$\psi(x)\in(L^2)$，我們可以證明

$$\lim_{T-S\to\infty}(T-S)^{-1}\int_S^T\{U_t\varphi(x)\}\overline{\psi(x)}\,dt=\int\varphi(x)\,d\mu(x)\int\psi(x)\,d\mu(x). \tag{5.32}$$

一個更弱的條件，即遍歷性(ergodic property)自動可以得到：如果$\mu(T_tB\Delta B)=0$，$\forall\ t$，則$\mu(B)=0$或1。[記號$A\Delta B$表示對稱差$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$。]有了這個遍歷性，我們可以證明：對任意$\varphi(x)\in(L^1)$，可設它爲$\mu$可積分，則$(U_t\varphi)(x)$的時間平均殆遍等於其空間平均，亦即

$$\lim_{T-S\to\infty}(T-S)^{-1}\int_S^T(U_t\varphi)(x)\,dt=\int_{D_0^*}\varphi(x)\,d\mu(x),\text{ a.e.} \tag{5.33}$$

順便值得一提的是，Kolmogorov流的一般理論顯示我們的$\{T_t\}$還具有更高階的混合性，比弱混合性更強！當然其證明的精神與方法都跟我們此地的證明很不同。

我們的第二個問題是考慮由定義如下的膨脹群$\{\tau_t:-\infty<t<\infty\}$

$$(\tau_t\xi)(u)=\xi(ue^t)e^{t/2}. \tag{5.34}$$

所誘生出的Ornstein-Uhlenbeck過程$\{\tau_t^*:-\infty<t<\infty\}$，我們要探討

它的值譜類型。讓我們令

$$U_t^\xi(x)=\varphi(\tau_t^* x),\qquad \varphi\in(L^2). \tag{5.35}$$

由一般理論可知，等式$U_t^\xi\mathscr{H}_n=\mathscr{H}_n$成立，因此$U_t^\xi$可以局限到$\mathscr{H}_n$，我們仍使用相同的記號。有了這個預備，我們就可以利用積分表現來研究U_t^ξ在$\mathscr{H}_n$上的值譜類型。

令$F\in\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$爲$\varphi\in\mathscr{H}_n$之積分表現的核。因爲$\mu$在$\tau_t^*$的作用下不變，故我們有

$$\begin{aligned}\mathscr{T}(U_t^\xi\varphi)(\xi)&=\int_{\mathscr{S}^*}\exp[i\langle\tau_{-t}^* x,\xi\rangle]\varphi(x)\,d\mu(x)\\&=C(\xi)i^n\int\cdots\int F(u_1,\ldots,u_n)\xi(u_1e^{-t})\cdots\xi(u_ne^{-t})e^{-nt/2}\,du_1\cdots du_n\\&=C(\xi)i^n\int\cdots\int F(u_1e^t,\ldots,u_ne^t)e^{nt/2}\xi(u_1)\cdots\xi(u_n)\,du_1\cdots du_n.\end{aligned}$$

因此關於$U_t^\xi\varphi$的核必爲$F(u_1e^t,\cdots,u_ne^t)e^{-nt/2}$。我們在$\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$上引進一個算子$V_t^\xi$，定義成

$$(V_t^\xi F)(u_1,\ldots,u_n)=F(u_1e^t,\ldots,u_ne^t)e^{nt/2}, \tag{5.36}$$

則$\{V_t^\xi:-\infty<t<\infty\}$變成$\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$的一參數單正算子群。它跟$\{U_t\}$的關係如下：

$$\mathscr{T}U_t\mathscr{T}^{-1}=V_t^\xi. \tag{5.37}$$

今因$\mathscr{T}$局限到$\mathscr{H}_n$時，只差個常數$(n!)^{1/2}$，就是$\mathscr{H}_n$到$\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$的保距映射，故我們只需研究$\{V_t\}$的值譜類型就好了。

我們先由$n=1$的情形着手，我們定義兩個子空間：

$$L^2(\mathbf{R}_+)=\{f\cdot\chi_{[0,\infty)}:f\in L^2(\mathbf{R})\},\qquad L^2(\mathbf{R}_-)=\{f\cdot\chi_{(-\infty,0)}:f\in L^2(\mathbf{R})\}.$$

這兩個$L^2(\mathbf{R})$之子空間，對每個t而言，都在V_t^ξ的作用下是不變的，並且它們的直和爲$L^2(\mathbf{R})$：

$$L^2(\mathbf{R})=L^2(\mathbf{R}_+)\oplus L^2(\mathbf{R}_-). \tag{5.38}$$

其次我們取其中之一，比如說 $L^2(\mathbf{R}_+)$，並且引進定義如下的保距映射W：

$$(Wf)(u)=f(e^u)e^{u/2},\qquad f\in L^2(\mathbf{R}_+). \tag{5.39}$$

由移位$\{S_t\}$所誘導出的群$\{V_t^s\}$及$L^2(\mathbf{R})$上的群$\{V_t\}$在保距映射U之下是互爲共軛的：

$$V_t^s=U^{-1}V_{-t}U. \tag{5.40}$$

因此$L^2(\mathbf{R}_+)$上的$\{V_t^s\}$與$L^2(\mathbf{R})$上的$\{V_{-t}\}$爲單直等價，並且$\{V_t^s\}$與$\{S_t\}$亦然。我們已知$\{S_t\}$的値譜類型，故我們可以斷言$\{V_t^s\}$在$L^2(\mathbf{R}_+)$上具有單純Lebesgue值譜。對於$L^2(\mathbf{R}_-)$的情形，亦有完全相同的結果。因此我們已經證明了，$\{V_t^s\}$在空間$\mathscr{H}_1$具有重數爲2（$m(\lambda)\equiv 2$）之Lebesgue 值譜。

再看$n=2$的情形。作爲（5.36）之特例，我們看出V_t^s的作用如下：

$$(V_t^sF)(u_1,u_2)=F(u_1e^t,u_2e^t)e^t,\qquad F\in L^2(\mathbf{R}^2).$$

由於F是對稱的，我們只需考慮當$u_1\geq u_2$時的取值就好了。這導致我們考慮變數代換

$$v_1=u_1u_2,\quad v_2=\frac{u_1}{u_2}, \tag{5.41}$$

參見（5.29）。由（5.41）我們看出，領域

$$D_+=\{(u_1,u_2):u_1\geq u_2,\ u_1u_2>0\}\ 與\ D_-=\{(u_1,u_2):u_1\geq u_2,\ u_1u_2<0\}$$

分別被變換成(v_1,v_2)平面上的第一與第三象限，記成$\widetilde{D}_+$與$\widetilde{D}_-$。我們現在專注於定義在D_+上的函數。顯然$V_t^sL^2(D_+)=L^2(D_-)$成立。牽連到（5.41）之變數變換，我們有一個保距映射將函數$F(u_1,u_2)\in L^2(D_+)$映成函數$\widetilde{F}(v_1,v_2)$，定義如下：

$$\widetilde{F}(v_1,v_2)=F\left((v_1v_2)^{1/2},\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{1/2}\right)(2v_2)^{-1}$$

在這個保距映射之下，$(V_t^* F)(u_1, u_2)$ 變成 $\widetilde{F}(v_1 e^t, v_2) e^{t/2}$，因此 V_t^* 已化約成只是一個變數之膨脹映射。下一步是要求得 $L^2(D_+)$ 之直和分解，分解成可列多個循環子空間，類似於討論 $\{T_t\}$ 時（5.31）式之分解。當我們有了這個分解時，我們就可以利用（5.40）之關係式來證明 $\{V_t^*\}$ 在 $L^2(D_+)$ 上的值譜類型爲可列Lebesgue型。對於 $L^2(D_-)$ 也可以得到完全相同的結果。於是我們得到結論：流 $\{\tau_t^*\}$ 在 $\mathscr{H}_2$ 上具有可列Lebesgue 值譜。

上述證明推廣到 $n > 2$ 的情形是很顯然的。綜合整個討論，我們已經證明了：流 $\{\tau_t^*\}$ 的值譜類型爲Hilbert空間 $(L^2) \ominus \{1\}$ 上的可列Lebesgue 型。

現在討論流 $\{\kappa_t^* : -\infty < t < \infty\}$，首先複習一下 κ_t 的定義（有時稱爲特殊的保角交換）：

$$(\kappa_t \xi)(u) = \xi\left(\frac{u}{-tu+1}\right)|-tu+1|^{-1}, \qquad \xi \in D_0.$$

在 D_0 上引進一個線性變換：

$$(\sigma\xi)(u) = \xi\left(\frac{1}{u}\right)|u|^{-1}. \tag{5.42}$$

則回想 D_0 的定義，我們就看出 $\sigma \in O(D_0)$。復次，

$$\kappa_t = \sigma^{-1} S_t \sigma, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{5.43}$$

（注意到 $\sigma^{-1} = \sigma$），因而 $\kappa_t^* = \sigma^* T_t \sigma^{*-1}$。今 σ^* 爲 $(D_0^*, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的一個保測變換，故 $\{\kappa_t^*\}$ 與 $\{T_t\}$ 兩個流同構，因此它們具有相同的值譜類型。綜合起來，我們就得到下述結果：

【定理 5.5】

$\{\tau_t^* : -\infty < t < \infty\}$ 與 $\{\kappa_t^* : -\infty < t < \infty\}$ 兩個流在Hilbert 空間 $(L^2) \ominus \{1\}$ 上都具有可列Lebesgue 值譜。

【註解 1】 定理5.5的證明包括將討論化約成有關於Brown 運動的流之

探討，這只要利用上述公式（5.12）就可以辦得到了。

【註解２】 如同 $\{T_t\}$ 的情形，$\{\tau_t^*\}$ 與 $\{\kappa_t^*\}$ 亦具有遍歷性與混合性。

作爲第 4.4 節的討論之延續，現在我們來提出一個有關 $\{T_t\}$ 之遍歷性的有趣應用。這是N. Wiener（1958，第 10，11講）所提出的，用來分析非線性網路的一個實際例子。這個模型牽涉到Brown運動（或白噪聲）的輸入，並且系統的內部構造假設爲完全不知道。進一步，我們再作一些合理的實際假設，比如，網路的現在值永遠跟輸入的未來值無關，亦即我們假設因果關係。因此在時刻 t 的輸出 $X(t)$ 被看作是直到 t 爲止所輸入的Brown運動（或白噪聲）之泛函。必須注意的一個重要性質是，輸出與輸入都具有時間的移位。我們把問題加以定式化，作爲由觀察隨機過程 $\{X(t)\}$ 來闡明網路的動力結構之企圖。下面的圖解可以幫忙說明我們的問題：

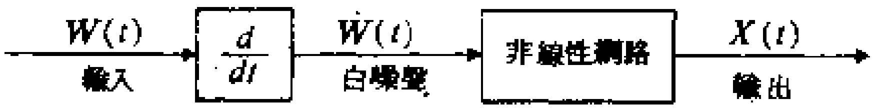


圖 9

利用我們在 $(D_0^*, \mathfrak{B}, \mu)$ 上所作的分析，上述問題可以重新表成如下：所輸入的白噪聲的一個樣本函數給如 $x \in D_0^*$，並且所輸出的 $X(t)$ 爲 x 的一個非線性泛函，而且爲 $\mathfrak{B}_t$ 可測，因爲它由直到 t 爲止所輸入的所決定。因此我們可以假設 $X(t, x) = (U_t\varphi)(x)$，$\varphi \in L_0^2$，其中爲了方便起見我們假設 φ 爲平方可積分。（如果不如此的話，我們可以選取一個嵌射有界可測函數 f，並且以下的 $\varphi(x)$ 均改成 $f(\varphi(x))$。）

今應用Hahn-Hellinger 定理（定理 5.3）到 (L^2) 上的 $\{U_t\}$，得到下面的直和分解

$$(L^2) = \mathscr{H}_0 \oplus \sum_{n,k} \oplus L_{n,k}, \qquad \mathscr{H}_n = \sum_k \oplus L_{n,k}, \tag{5.44}$$

其中每個 $L_{n,k}$ 爲相對於 $\{U_t\}$ 之循環子空間，並且 $\mathscr{H}_n$ 爲 n 重 Wiener 積分。進一步，我們知道，在 $n = 1$ 的情形，只涉及到一個循環子空間，而當 $n \geq 2$ 時，就有可列無限多個 $L_{n,k}$。我們在定理 5.4 的證明裡已看過，每

個$L_{n,k}$都包含有一個循環向量$\psi_{n,k}$屬於L_0^2，使得

$$L_{n,k}=\mathfrak{S}\{U_t\psi_{n,k}:-\infty<t<\infty\}, \tag{5.45}$$

其中$\mathfrak{S}\{\cdot\}$表示由$\{\cdot\}$中的元素所張成的閉子空間。令$Q_{n,k}$表示投影到子空間$L_{n,k}$之投影算子，再令$Q_{n,k}X(t)=X_{n,k}(t)$。因爲$Q_{n,k}U_t=U_tQ_{n,k}$，我們有$U_tX_{n,k}(s)=X_{n,k}(s+t)=U_{s+t}X_{n,k}(0)=U_{s+t}Q_{n,k}\varphi$。對於每個$n$，取$dp_n$爲Lebesgue測度，然後應用Hahn-Hellinger定理的推論可知，存在$L^2(\mathbf{R})$函數$f(\lambda)$（$\neq 0$殆遍）及$g(\lambda)$，分別相應於$\psi_{n,k}$與$X_{n,k}(0)$，使得U_t作用到$\psi_{n,k}$與$X_{n,k}(0)$分別得到$e^{i\lambda t}f(\lambda)$與$e^{i\lambda t}g(\lambda)$。由於$f(\lambda)$由$\psi_{n,k}$決定，故我們可設$f(\lambda)$爲已知，其實際形狀可以利用定理5.4的證明技巧獲得。[特別地，參見(5.31)；N.Wiener(1958，第10講)也描述了如何求得$f(\lambda)$。]爲了利用已知函數$f(\lambda)$來求未知函數$g(\lambda)$，只要知道協方差函數

$$\gamma_{n,k}(h)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda h}f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\,d\lambda. \tag{5.46}$$

就好了。（注意到，$f(\lambda)\neq 0$殆遍）。因爲$\{T_t\}$是遍歷的，我們可以利用下列步驟經由$X(t,x)$的樣本函數求得$\gamma_{n,k}(h)$：

$$\begin{aligned}
&\lim_{T-S\to\infty}(T-S)^{-1}\int_S^T(U_{t+h}\psi_{n,k})(x)\overline{(U_t\varphi(x))}\,dt\\
&=\lim_{T-S\to\infty}(T-S)^{-1}\int_S^T U_t\{(U_h\psi_{n,k})(x)\cdot\overline{\varphi(x)}\}\,dt\\
&=\int_{D_0'}(U_h\psi_{n,k})(x)\cdot\overline{\varphi(x)}\,d\mu(x) \qquad \text{a.e. }(\mu)\\
&=\int_{D_0'}(U_h\psi_{n,k})(x)\cdot\overline{(Q_{n,k}\varphi)(x)}\,d\mu(x) \qquad (\text{因爲 }Q_{n,k}U_h=U_hQ_{n,k})\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ih\lambda}f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\,d\lambda.
\end{aligned}$$

第一個極限是$(U_t\psi_{n,k})(x)$的樣本協方差，它是由觀測過程$X(t,x)$，x固定，人爲地建構出來的，因此是可以實際計算出的一個量。下面的圖解

告訴我們求得 $\gamma_{n,k}(h)$ 的方法：

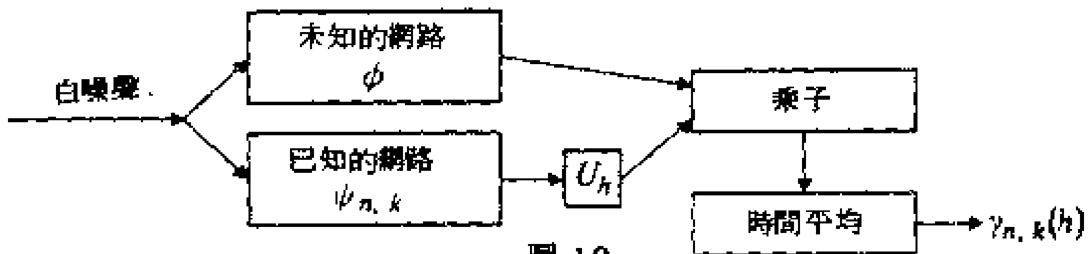


圖 10

因此如果我們可以建構由 $\psi_{n,k}$ 所描述的無窮多個網路，則每個 $\gamma_{n,k}$ 都可以求得，從而 $X_{n,k}(t, x)$ 也可以被求得。綜合這些關於 $X_{n,k}(t, x)$ 的結果，我們就得到事先假設為未知的關於 $X(t, x)$ 的結果。在結束網路理論的討論之前，我們注意到，在建構由 $\psi_{n,k}$ 以及圖 10 的乘子所描述的非線性網路時，確實出現了非線性操作。我們也注意到，如第A.4節所顯示，這些非線性網路可以機械地加以建構出來。

5-6 利用旋轉群來推導白噪聲的性質

本節的目標是要利用旋轉群 $O(E)$ 來刻劃白噪聲 $(E^*, \mathfrak{B}, \mu)$，其中基本的核式空間取為 $\mathscr{S}$ 或 D_0。在我們的討論背後之主要想法，取自 Y. Umemura (1965)。

在進入主要論題之前，我們必須先解說 G 遍歷性的一般概念。令 $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 為一個機率空間，G 為可測空間 $(\Omega, \mathbf{B})$ 上的自同構群。測度 P 稱為具有 G 遍歷性，如果(i)它是 G 不變的，亦即對於每個 $g \in G$，P 是 g 不變的，並且(ii)如果每個 $\mathbf{B}$ 可測 G 不變集的測度為 0 或 1。特別地，如果 G 為 Brown 運動的流 $\{T_t\}$，則 G 遍歷性跟第 5.5 節所介紹的遍歷性是相同的。因此上節有關 $\{T_t\}$ 的結果，再加上 $\{T_t\} \subset O^*(E^*)$ 的事實，我們就得到下列的斷言：

【命題 5.4】

令 μ 為白噪聲的測度，則 μ 具有 $O^*(E^*)$ 遍歷性。

當我們取定一個坐標系時，由 E 的所有有限維旋轉所組成的群 G_∞，可以仿第 5.2 節所述的辦法引進來。我們可以進一步定義 $O(E)$ 的更大的子群 G_r，由所有可能的 G_∞ 來產生，亦即讓坐標系（即完備么正系統 $\{\xi_n\}$

）作所有可能地變化，得到種種G_∞，以之產生G_f。令$G_f^* = \{ g^* : g \in G_f \}$。

【命題5.5】

白噪聲的測度μ具有G_f^*遍歷性。

【證明】 假設$\varphi(x)$有界且為U_g不變：即對所有$g \in G_f$，我們有

$$(U_g\varphi)(x)(\equiv \varphi(g^* x)) = \varphi(x)$$

我們要證明$\varphi(x)$殆遍為一個常數。令$\{\xi_n\}$為$L^2(\mathbf{R})$中的一個完備么正系統，再置$\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}\{<x, \xi_1>, \cdots, <x, \xi_n>\}$。記條件期望$E\{\varphi \mid \mathfrak{B}_n\}$為$\varphi_n$，則我們有如下的分解

$$\varphi = \varphi_n + \varphi_n^\perp, \quad \varphi_n^\perp \text{ 直交於 } L^2(E^*, \mathfrak{B}_n, \mu).$$

因為$\varphi = U_g\varphi = U_g\varphi_n + U_g\varphi_n^\perp$，我們有

$$\varphi_n - U_g\varphi_n = -\varphi_n^\perp + U_g\varphi_n^\perp \quad \forall\ g \in G_f. \tag{5.47}$$

因此（5.47）右項之(L^2)範數至多為$\|\varphi_n^\perp\| + \|U_g\varphi_n^\perp\| = 2\|\varphi_n^\perp\|$，當$n \to \infty$時，這趨近於0。進一步，當$n$固定時，我們可以找到一個元素$g \in G_f$使得由$\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$所張成的向量空間直交於由$\{g\xi_1, \cdots, g\xi_n\}$所張成的向量空間。然則，對於此$g$，$g\mathfrak{B}_n$獨立於$\mathfrak{B}_n$，從而$\varphi_n$與$U_g\varphi_n$也獨立，這是因為它們分別是$\mathfrak{B}_n$及$g^*\mathfrak{B}_n$可測。於是（5.47）左項之$(L^2)$範數的平方成為

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_n\|^2 + \|U_g\varphi_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\int_{E^*} \varphi_n(x)\overline{U_g\varphi_n(x)}\,d\mu(x) \\
&= 2\|\varphi_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{\int_{E^*} \varphi_n(x)\,d\mu(x)\right\}^2 \le 2\|\varphi_n^\perp\|^2
\end{aligned} \tag{5.48}$$

其中Re表示實數部分。由最後一個不等式得知

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{E^*} \varphi_n(x)\,d\mu(x)\right\}^2 = \|\varphi\|^2.$$

另一方面，我們知道

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E^*}\varphi_n(x)\,d\mu(x)=\int_{E^*}\varphi(x)\,d\mu(x)\equiv m$$

因而我們有

$$m^2=\left(\int\varphi(x)\,d\mu(x)\right)^2=\int\varphi(x)^2\,d\mu(x),$$

亦即 $\varphi(x)=m$，對 μ 殆遍成立。 #

在第 3.3 節裡我們引進記號 μ_σ，用來表示具有變異數 σ^2 的白噪聲之測度。

【定理 5.6】

在可測空間 $(E^*, \mathfrak{B})$ 上的一個機率測度 ν 爲 $O^*(E^*)$ 不變的充要條件是 ν 可以表成下形

$$\nu=a\delta_0+\int_{(0,\infty)}\mu_\sigma\,dm(\sigma),\qquad a\geq 0,\tag{5.49}$$

其中 δ_0 爲 Dirac 測度，m 爲 $(0,\infty)$ 上的一個有界 Borel 測度。

爲了證明這個定理，我們需要用到兩個補題。

【補題 5.1】

在可測空間 $(E^*, \mathfrak{B})$ 上的一個機率測度 ν 爲 $O^*(E^*)$ 不變的充要條件是 ν 的特徵泛函 $C(\xi)$ 只是 $L^2(\mathbf{R})$ 範數 $\|\xi\|$ 的函數。

【證明】 充分性：如果特徵泛函可以表成 $C(\xi)=h(\|\xi\|)$，其中 h 爲 $(0,\infty)$ 上的函數，則 $g^*\circ\nu$ 如下形

$$C(g^{-1}\xi)=h(\|g^{-1}\xi\|)=h(\|\xi\|)=C(\xi).$$

於是（由第 3.2 節定理 3.2）我們必有 $g^*\circ\nu=\nu$。

必要性：如果對任意 $g^*\in O^*(E^*)$ 我們有 $g^*\circ\nu=\nu$，則 ν 的特

徵泛函滿足$C(g\xi)=C(\xi)$，$g\in O(E)$。因此$C(\xi)$在集合$E_\xi=\{g\xi;g\in O(E)\}$上取常數值。但是我們有$E_\xi=\{\eta:\|\eta\|=\|\xi\|\}$，因爲對任何滿足$\|\eta\|=\|\xi\|$之$\eta$，存在$g\in O(E)$，事實上$g\in G_f$，使得$\eta=g\xi$。因此我們必有$C(\xi)=f(\|\xi\|)$，其中$f$爲$[0,\infty)$上一個適當的函數。 #

現在我們再給一個定義。設$f(t)$爲定義在$[0,\infty)$的一個函數，如果對任意$t\geq 0$，$\alpha\geq 0$以及非負整數n，我們有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(t+k\alpha)\geq 0. \tag{5.50}$$

則稱f爲完全單調(completely monotonic)。有一個周知的Bernstein定理，給出了所有完全單調函數的表現式，這可以參考D.V. Widder (1946)。我們敍述於下：

【補題5.2】 (S. Bernstein)

$[0,\infty)$上的函數$f(t)$爲完全單調的充要條件是在$[0,\infty)$上存在一個有界Borel測度m使得

$$f(t)=\int_0^\infty e^{-t\lambda}\,dm(\lambda). \tag{5.51}$$

【定理5.6的證明】

1. 因爲測度ν爲$O^*(E^*)$不變，補題5.1告訴我們，ν的特徵泛函C只是$\|\xi\|$的函數，比如說，$C(\xi)=f(\|\xi\|^2)$。
2. 我們要來證明函數f爲完全單調。首先證明

$$f(t)\geq 0. \tag{5.52}$$

令$\{\xi_j:1\leq j\leq n\}$爲$L^2(\mathbf{R})$中的一個么正系統，再置$\tilde{\xi}_j=(\tfrac{1}{2}t)^{1/2}\xi_j$，$1\leq j\leq n$。因爲$C(\xi)=f(\|\xi\|^2)$爲正定的，故我們有

$$\sum_{j,k=1}^{n}f(\|\tilde{\xi}_j-\tilde{\xi}_k\|^2)=nf(0)+\sum_{j\neq k}f(\|\tilde{\xi}_j-\tilde{\xi}_k\|^2)=n+n(n-1)f(t)\geq 0.$$

因爲 $f(0)=1$ 且 $\|\tilde{\xi}_j-\tilde{\xi}_k\|^2=\|\tilde{\xi}_j\|^2+\|\tilde{\xi}_k\|^2=t$ 。又因爲 n 爲任意，故（5.52）之不等式就獲證了。

我們再進行第二步驟。固定 $\alpha>0$ 並且令

$$-\{f(\|\xi\|^2+\alpha)-f(\|\xi\|^2)\}=f_1(\|\xi\|^2),$$

我們要來證明

$$f_1(\|\xi\|^2),\qquad \xi\in E. \tag{5.53}$$

之正定性。對於任意一組線性獨立向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ ，我們可以找到 $\xi_0\in E$ ， $\|\xi_0\|^2=\alpha$ ，使其直交於這組向量。其次我們令

$$\eta_j=\begin{cases}\xi_j & 1\le j\le n,\\ \xi_{j-n}+\xi_0 & n+1\le j\le 2n,\end{cases}$$

並且對於一列給定的複數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ，我們定義

$$b_j=\begin{cases}a_j & 1\le j\le n,\\ -a_{j-n} & n+1\le j\le 2n.\end{cases}$$

再次回想一下，因爲 $f(\|\xi\|^2)$ 爲正定的，故有

$$\sum_{j,k=1}^{2n} b_j\bar{b}_k f(\|\eta_j-\eta_k\|^2)\ge 0,$$

這又可以寫成

$$\begin{aligned}&\sum_{j,k=1}^{n} a_j\bar{a}_k f(\|\xi_j-\xi_k\|^2)-\sum_{j,k=1}^{n} a_j\bar{a}_k f(\|\xi_j-\xi_k-\xi_0\|^2)\\ &\qquad-\sum_{j,k=1}^{n} a_j\bar{a}_k f(\|\xi_j+\xi_0-\xi_k\|^2)+\sum_{j,k=1}^{n} a_j\bar{a}_k f(\|\xi_j-\xi_k\|^2)\\ &\quad=2\sum_{j,k=1}^{n} a_j\bar{a}_k f(\|\xi_j-\xi_k\|^2)-2\sum_{j,k=1}^{n} a_j\bar{a}_k f(\|\xi_j-\xi_k\|^2+\alpha)\\ &\quad=2\sum_{j,k=1}^{n} a_j\bar{a}_k f_1(\|\xi_j-\xi_k\|^2)\ge 0.\end{aligned}$$

因此我們已經證明了（5.53）之正定性。

3. 在證明（5.53）之正定性時，我們只用到了 $f(\|\xi\|^2)$ 之正定性，故同樣的論證也適用於泛函 $f_1(\|\xi\|^2)$，以之證明 $f_2(\|\xi\|^2)=-\{f_1(\|\xi\|^2+\alpha)-f_1(\|\xi\|^2)\}$ 之正定性。重覆使用這個論證步驟，再加上（5.52）式，我們就可以證明 $f(t)$ 爲完全單調。因此，由補題5.2可知，在 $[0,\infty)$ 上存在一個有界Borel測度 m，使得 $C(\xi)$ 可以表成下形

$$C(\xi)=f(\|\xi\|^2)=\int_0^\infty \exp[-\lambda\|\xi\|^2]\,dm(\lambda). \tag{5.54}$$

在0點的質量 $m(\{0\})=a$ 可視爲額外部分，於是（5.54）式可以重寫爲

$$C(\xi)=a+\int_{(0,\infty)} \exp[-\lambda\|\xi\|^2]\,dm(\lambda). \tag{5.55}$$

常數 a 及泛函 $\exp[-\lambda\|\xi\|^2]$ 分別爲 $a\delta_0$ 與白噪聲 $\mu_{\sqrt{2\lambda}}$（具有變異數 2λ）之特徵泛函，因此我們就證得（5.49）[記號上要將 $m(\frac{1}{2}\sigma^2)$ 改成 $m(\sigma)$]。 #

【命題5.6】

在可測空間 $(E^*,\mathcal{B})$ 上，如果一個 $O^*(E^*)$ 不變測度 ν 具有 $O^*(E^*)$ 遍歷性，則 $\nu=\delta_0$ 或 $\nu=\mu_\sigma$，某 $\sigma>0$。

【證明】 首先我們注意到，一個 $O^*(E^*)$ 不變測度 ν 具有 $O^*(E^*)$ 遍歷性的充要條件是對任意 $O^*(E^*)$ 不變測度 ν'，恒有

$$\nu'\ll\nu \quad\Rightarrow\quad \nu'\sim\nu \ \text{ 或 }\ \nu'=0. \tag{5.56}$$

因爲若 ν 具有 $O^*(E^*)$ 遍歷性，則測度 ν' 的擔台之 ν 測度爲1或0。由前者得知 $\nu'\sim\nu$，而由後者得知 $\nu'=0$。反過來是很顯然的。

在 ν 爲 $O^*(E^*)$ 不變的假設下，ν 可以表成（5.49）式之形。進一步在 ν 具有 $O^*(E^*)$ 遍歷性的假設下，可以證明在（5.49）中之 m 的擔

台（若 $a\neq 0$，它包含 0）變成一點。事實上，若m的擔台含有兩點以上，則它可以分割成兩個非空子集A與B。不妨取A，並且建構一個$O^*(E^*)$不變測度

$$\nu' = \int_A \mu_\sigma \, dm(\sigma).$$

顯然$\nu'\ll\nu$並且$\nu'\neq\nu$，故由ν之具有$O^*(E^*)$遍歷性必得$\nu'=0$，這是矛盾的。因此m的擔台恰恰只含一點，我們的斷言就證明了。 #

【註解】 我們可以很容易看出命題 5.6 在有限維空間的類推情形。這就是：$\mathbf{R}^n$ 上的一個機率測度，如果在所有 n 維旋轉之下是不變的，並且是遍歷的，則它或者是在原點的Dirac 測度（可差個常數倍），或者是球面$S^{n-1}(r)$上的均勻測度，其中$S^{n-1}(r)$爲以原點爲球心，r爲半徑之球面。這個斷言是很顯然的。球面上的均勻測度跟Gauss 分佈似乎很不同，然而我們知道，在某種意味下，當$n\to\infty$時，$S^n(\sqrt{n})$上的均勻測度趨近於白噪聲測度μ，參見T. Hida 與H. Nomoto（1964）。將命題5.6跟命題1.19作比較也是很有趣的，兩者都是利用旋轉來刻劃測度。

5-7 白噪聲的變換：平移

在進入本節的主題之前，我們先來作一個觀察，至少可以提供我們直觀上的一些動機。

【觀察】 在第 1.3 節 [3] 例 2 裡，我們利用Kakutani 定理得到的結果是這樣的：$\mathbf{R}^\infty$上的白噪聲測度，在$\mathbf{R}^\infty$平移向量m之下，會變成一個等價測度的充要條件是$m\in l^2$。這個結果可以修飾成E^* 上的結果。如果我們取$L^2(\mathbf{R})$的一組完備么正系統$\{\xi_n\}$，令

$$x\to x_n=\langle x,\xi_n\rangle,\qquad x\in E^*,\qquad n=1,2,\ldots.$$

這是從E^*到$\mathbf{R}^\infty$的一個自然映射。這個映射是從E^*到$\mathbf{R}^\infty$的一個子集之間的同構，故$\{x_n\}$可視爲$x\in E^*$的坐標組。復次，由於$\{\langle x,\xi_n\rangle\}$爲可測空間（$E^*$，$\mathfrak{B}$，$\mu$）上的一組獨立的標準Gauss隨機變數，故

$\mathbf{R}^{\infty}$上的白噪聲就是$\{<x,\xi_n>\}$的機率分佈。(注意到，定義如$x_n=<x,\xi_n>$之序列$\{x_n\}$殆遍落在l^2之外)。

今引進平移T_m，$m\in E^*$，作用在E^*上，定義如下：

$$T_m: x \to x+m, \qquad x\in E^*.$$

測度μ被T_m變換成另一個測度，記成μ_m。這可以改在$\mathbf{R}^{\infty}$上來討論，因為m與x可以分別寫成$\{m_n\}$與$\{x_n\}$，其中$m_n=<m,\xi_n>$，並且$m\in L^2(\mathbf{R})$等價於$\{m_n\}\in l^2$。於是我們可以說μ_m等價於μ，若且唯若$m\in L^2(\mathbf{R})$(亦即$\{m_n\}\in l^2$)。在等價的情況下，密度函數為

$$\frac{d\mu_m}{d\mu}(x)=\exp\left[-\langle x,m\rangle-\frac{1}{2}\|m\|^2\right] \qquad (\text{在}E^*\text{上})$$

$$=\exp\left[-\sum_n x_n m_n-\frac{1}{2}\sum_n m_n^2\right] \qquad (\text{在}\mathbf{R}^{\infty}\text{上})$$

有了這些簡單的觀察當作我們的啓發，我們現在可以來討論主題了。

如先前所述，我們取基本的核式空間E為$\mathscr{S}$或D_0，並且對E^*作$\eta\in E$的平移記為T_η：

$$T_\eta: x\to x+\eta, \qquad x\in E^*. \tag{5.57}$$

顯然T_η為E^*的$\mathfrak{B}$可測自同構，並且合成映射$T_\eta\circ\mu$滿足

$$(T_\eta\circ\mu)(B)=\mu(B+\eta), \qquad B\in\mathfrak{B}, \tag{5.58}$$

其中$B+\eta=\{x+\eta: x\in B\}$。

$(E^*,\mathfrak{B})$上的機率測度$T_\eta\circ\mu$，其特徵泛函$C_\eta(\xi)$為

$$C_\eta(\xi)=\int_{E^*}\exp[i\langle x,\xi\rangle]\,dT_\eta\circ\mu(x)=\int_{E^*}\exp[i\langle x,\xi\rangle]\,d\mu(x+\eta). \tag{5.59}$$

令E_2為由ξ與η所張成的2維子空間，並且回想第2.3節的討論。由那裡所得的結果，我們知道$E_2^*\cong E^*/E_2^a=\rho_{E_2}E^*$並且$E_2^{\perp *}\cong E^*/E_2^{\perp a}$。任何$E^*$的元素$x$皆可表成

$$x = x' + x'', \qquad x' \in E_2^*, x'' \in E_2^{\perp *}.$$

相對於這個分解，測度 μ 及 $T_\eta \circ \mu$ 也都可以表成乘積測度：

$$\begin{aligned} d\mu(x) &= d\mu'(x') \times d\mu''(x'') \\ d\mu(x+\eta) &= d\mu'(x'+\eta) \times d\mu''(x''). \end{aligned} \tag{5.60}$$

其中 μ' 與 μ'' 分別爲 E_2^* 與 $E_2^{\perp *}$ 上的機率測度。如果 T_η 局限到 E_2^* 時仍記爲 T_η，則 $d\mu'(x'+\eta)$ 可以寫成 $dT_\eta \circ \mu'(x')$。

令 $\{\xi_1, \xi_2\}$ 爲兩維空間 E_2 中的一對直交向量，再取向量 $\eta = b_1\xi_1 + b_2\xi_2$。在這個坐標系以及 E_2^* 同構於 E_2 的觀察之下，我們看出 E_2^* 的元素 x' 可以表成 $x' = (x_1, x_2)$，$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$。相對於測度 μ' 而言，$x_1 = \langle x', \xi_1 \rangle$ 與 $x_2 = \langle x', \xi_2 \rangle$ 爲獨立的標準Gauss隨機變數；而相對於測度 $T_\eta \circ \mu'$ 而言，它們仍然是獨立的Gauss隨機變數，具有單位變異數，不過此時它們的期望值分別爲 $-b_1$ 與 $-b_2$。測度 μ' 與 $T_\eta \circ \mu'$ 當然是等價的，並且密度 $dT_\eta \circ \mu'/d\mu'$ 爲

$$\begin{aligned} \frac{dT_\eta \circ \mu'}{d\mu'}(x') &= \exp\left[-\frac{1}{2}\{(x_1+b_1)^2 + (x_2+b_2)^2 - x_1^2 - x_2^2\}\right] \\ &= \exp\left[-\langle x', \eta\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|^2\right], \qquad (x' \equiv (x_1, x_2)). \end{aligned} \tag{5.61}$$

回到（5.59）式，我們得到

$$\begin{aligned} C_\eta(\xi) &= \int_{E_2^*}\int_{E_2^{\perp *}} \exp[i\langle x, \xi\rangle]\, d\mu'_\eta(x'+\eta)\, d\mu''(x'') \qquad (x = x' + x'') \\ &= \int_{E_2^{\perp *}} \exp[i\langle x'', \xi\rangle]\, d\mu''(x'') \\ &\quad \times \int_{E_2^*} \exp[i\langle x', \eta\rangle]\exp\left[-\langle x', \eta\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|^2\right] d\mu'(x') \\ &= \int_{E^*} \exp[i\langle x, \xi\rangle]\exp\left[-\langle x, \eta\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|^2\right] d\mu(x), \end{aligned}$$

其中用到了 $\langle x, \eta\rangle = \langle x', \eta\rangle$

將最後的積分項跟（5.59）$C_\eta(\xi)$之定義作比較，得到

$$\frac{dT_\eta \circ \mu}{d\mu}(x) = \exp\left[-\langle x, \eta\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|^2\right]. \tag{5.62}$$

一般而言，如果一個測度μ被一個可測變換變成一個等價測度，則稱μ爲在T之下是擬不變的（quasi-invariant）或簡稱爲T擬不變。擬不變性的定義可以推廣到可測變換群G的情形。如果相對於G的每一個元素，μ都是擬不變的，則稱μ爲在G之下是擬不變的，或簡稱爲G擬不變。

上面我們已經看過，白噪聲測度μ在T_η，$\eta \in E$，之下是擬不變的，其中T_η定義如（5.57）式。這些算子所成的集合$\mathbf{T} = \{T_\eta : \eta \in E\}$允許天然的乘法運算：

$$(aT_{\eta_1})(bT_{\eta_2}) = T_{a\eta_1 + b\eta_2}, \qquad a, b \in \mathbf{R}.$$

因此$\mathbf{T}$變成爲一個Abel群，以$\mathbf{R}$爲算子領域（亦即爲一個實向量空間），並且同構於E。我們利用$\mathbf{T}$將結果綜合如下：

【定理 5.7】

1. 白噪聲測度μ是$\mathbf{T}$擬不變的。
2. 對於每個$T_\eta \in \mathbf{T}$，密度$dT_\eta \circ \mu / d\mu$給如（5.62）式。

【推論】 對於每個$\eta \in E$，在(L^2)上定義如下的映射U_η爲(L^2)上的一個單正算子：

$$(U_\eta \varphi)(x) = \varphi(x+\eta)\exp\left[-\frac{1}{2}\langle x, \eta\rangle - \frac{1}{4}\|\eta\|^2\right], \qquad \varphi \in (L^2). \tag{5.63}$$

顯然$\{U_\eta : \eta \in E\}$構成(L^2)上的一個單正群，並且由下面的命題可知，U_η對η是連續的。

【命題 5.7】

在E中令η趨近於0，則對於每個$\varphi \in (L^2)$，我們有

$$(U_\eta \varphi)(x) \to \varphi(x),\ (L^2)\text{之強意味收斂} \tag{5.64}$$

【證明】 考慮第 4.2 節裡所引進的代數A，這是 (L^2) 的一個稠密線性子空間。對於A 的任意元素 φ，如果我們證明了 (5.64) 式，則原命題就證明了，因爲對於一般的 φ 及 $\varepsilon > 0$，我們可以找到 $\psi \in$ A 使得 $\|\varphi-\psi\| < \varepsilon$。由於 U_η 爲一單正算子，故得

$$\begin{aligned}\|U_\eta\varphi - \varphi\| &\le \|U_\eta\varphi - U_\eta\psi\| + \|U_\eta\psi - \psi\| + \|\psi - \varphi\| \\ &\le 2\|\varphi - \psi\| + \|U_\eta\psi - \psi\| \le 2\varepsilon + \|U_\eta\psi - \psi\|.\end{aligned}$$

進一步，A 中的元素 ψ 必爲形如 $\psi(x) = \Sigma_j a_j \exp[\, i < x , \xi_j >]$ (有限項之和) 之泛函，故只要證明 (5.64) 式對於 $\psi(x) = \exp[\, i < x , \xi >]$ 成立就好了。對於這種 ψ，我們有：

$$\begin{aligned}&\int_{E^*}\left|\exp[i\langle x, \xi\rangle + i\langle \eta, \xi\rangle]\exp\left[-\frac{1}{2}\langle x, \eta\rangle - \frac{1}{4}\|\eta\|^2\right] - \exp[i\langle x, \xi\rangle]\right|^2 d\mu(x) \\ &= \int_{E^*}\left|\exp\left[i\langle \xi, \eta\rangle - \frac{1}{4}\|\eta\|^2\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\langle x, \eta\rangle\right] - 1\right|^2 d\mu(x) \\ &= 2 - 2\cos(\langle \xi, \eta\rangle)\exp\left(-\frac{1}{8}\|\eta\|^2\right) \to 0 \quad \text{當 } \eta \to 0 \text{ 時}\end{aligned}$$

這就證明了命題。 #

由這個命題可得知，($\{U_\eta : \eta \in E\}$, (L^2)) 爲位相群 E 的一個單正表現。

設 G 爲作用在 E^* 上的一個變換群。在上一節所引入的一個 G 不變測度之 G 遍歷性概念，可以推廣到測度是 G 擬不變的情形。在這種情形之下，一個測度稱爲 G 遍歷，如果任何 G 不變可測集的測度爲 0 或 1。

【定理 5.8】 [Y. Umemura (1965)]

白噪聲的測度 μ 爲 T 遍歷。

【證明】 設 $\varphi(x)$ 爲一個有界 (L^2) 泛函，再設對任意 $\eta \in E$，$\varphi(T_\eta x) = \varphi(x)$，殆遍。我們要來證明 $\varphi(x) = 0$ 殆遍。取一個完備么正系統 $\{\xi_n\} \subset L^2(\mathbf{R})$，並且令 $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}\{< x , \xi_j >: 1 \le j \le n\}$。再令

$$\varphi_n = E(\varphi \mid \mathfrak{B}_n), \qquad \varphi_n^{\perp} = \varphi - \varphi_n.$$

則 $\varphi_n^{\perp}$ 為 φ 的成分，垂直於 $L^2(E^*,\mathfrak{B}_n,\mu)$。我們也有

$$\begin{aligned}\varphi(T_\eta x)&=\varphi(x+\eta)\\&=\varphi_n(x+\eta)+\varphi_n^{\perp}(x+\eta),\end{aligned}$$

並且我們注意到 $\varphi_n(x+\eta)$ 為一個 $L^2(E^*,\mathfrak{B}_n,\mu)$ 泛函。由於 $\varphi_n(x)$ 可以表成形如 $\varphi_n(x)=f(\langle x,\xi_1\rangle,\langle x,\xi_2\rangle,\cdots,\langle x,\xi_n\rangle)$，其中 f 為 $\mathbf{R}^n$ 上的某個函數，故 $\varphi_n(x+\eta)=f(\langle x,\xi_1\rangle+\langle\eta,\xi_1\rangle,\cdots,\langle x,\xi_n\rangle+\langle\eta,\xi_n\rangle)$ 仍然為一個 $\mathfrak{B}_n$ 可測函數。現在我們討論 $\varphi_n^{\perp}(x+\eta)$。如果 η 為一個線性組合 $\eta=\Sigma_1^n b_j\xi_j$，並且 $\psi(x)=g(\langle x,\xi_1\rangle,\langle x,\xi_2\rangle,\cdots,\langle x,\xi_n\rangle)$ 屬於 $L^2(E^*,\mathfrak{B}_n,\mu)$，則有

$$\begin{aligned}\int_{E^*}\varphi_n^{\perp}(x+\eta)\overline{\psi(x)}\,d\mu(x)&=\int_{E^*}\varphi_n^{\perp}(x)\overline{g(\langle x,\xi_1\rangle-b_1,\ldots,\langle x,\xi_n\rangle-b_n)}\\&\qquad\times\exp\left[\sum_1^n b_j\langle x,\xi_j\rangle-\frac{1}{2}\|\eta\|^2\right]d\mu(x)\end{aligned}$$

因為 $\varphi_n^{\perp}(x+\eta)$ 直交於 $L^2(E^*,\mathfrak{B}_n,\mu)$，且由 $\varphi_n^{\perp}$ 的定義知，最後一個積分為 0。因此，將假設式

$$\varphi_n(x+\eta)+\varphi_n^{\perp}(x+\eta)=\varphi_n(x)+\varphi_n^{\perp}(x)$$

重寫成

$$\varphi_n(x+\eta)-\varphi_n(x)=\varphi_n^{\perp}(x)-\varphi_n^{\perp}(x+\eta)$$

再加上先前的討論，就可以得知等式的兩邊皆等於 0。今令 η 在由 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n 所張成的向量空間中變動，並且將 $\varphi_n(x)$ 視為 $\mathbf{R}^n$ 上的函數時，$\varphi_n(x)$ 在空間變數的任何平移之下是不變的，故它必為一個常函數。最後，我們注意到，當 $n\to\infty$ 時，在 (L^2) 中有 $\varphi_n\to\varphi$，這就證明了 $\varphi(x)=$ 常數，殆遍。 #

到現在為止，我們所討論的 T_η 都局限在 $\eta\in E$ 的情形。在本節開頭的觀察中，我們提示過，η 可以在較大一類領域中變動的充要條件是 $T_\eta\circ\mu$

$\sim \mu$（等價）。取一般的一個 f 並且考慮映射

$$T_f: x \to x + f, \qquad x \in E^*. \tag{5.65}$$

於是我們發現，$T_f \circ \mu$ 可以馬上被定義。σ 環 $\mathfrak{B}_n$ 如先前的定義，並且注意到 $T_f \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_n$，故我們可以應用第 1.3 節 Kakutani 定理的證明技巧。令 μ^n 與 $T_f \mu^n$ 分別為 μ 與 $T_f \circ \mu$ 之局限到 $\mathfrak{B}_n$ 上，則 $\mu^n \sim T_f \mu^n$。我們也知道，μ 與 $T_f \circ \mu$ 是等價的充要條件為 $\psi_n = (dT_f \mu^n / d\mu^n)^{1/2}$ 在 (L^2) 中構成一個 Canchy 序列。如果這個條件滿足的話，則均方極限 $(\lim_{n\to\infty} \psi_n)^2$ 恰好就是密度 $dT_f \circ \mu / d\mu$。詳細的證明如下：令 $\langle f, \xi_n \rangle = a_n$，$n \geq 1$，則 μ^n 為一個 n 維 Gauss 分佈，並且將 μ^n 作 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 之平移就得到 $T_f \mu^n$。因此

$$\psi_n(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_1^n a_j\langle x, \xi_j\rangle - \frac{1}{4}\sum_1^n a_j^2\right],$$

並且很容易可以看到 $\{\psi_n\}$ 構成一個 Cauchy 序列的充要條件是 $\Sigma_1^\infty a_j^2 < \infty$，亦即若且唯若 $f \in L^2(\mathbf{R})$。因此我們就得到

【定理 5.9】

白噪聲的測度 μ 與誘生測度 $T_f \circ \mu$ 是等價的充要條件是 $f \in L^2(\mathbf{R})$。當 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 時，我們有

$$\frac{dT_f \circ \mu}{d\mu}(x) = \exp\left[-\langle x, f\rangle - \frac{1}{2}\|f\|^2\right]. \tag{5.66}$$

【註解】 (5.66) 式右邊之 $\langle x, f \rangle$ 項表示級數和 $\Sigma_n a_n \langle x, \xi_n \rangle$，並且取 (L^2) 中之強收斂意味。這個和跟 $\{\xi_n\}$ 的選取法無關，而且跟第 4.5 節開頭所定義的 $\langle x, f \rangle$ 相等。

上述的結果可以延拓到當 f 為 x 之線性泛函，比如 $f = f(x, a)$，且滿足下面(a)與(b)的情形。令 L_n^2 如第 4.4 節所示，

(a) 對任意 u，$f(\cdot, u) \in \mathscr{H}_1 \cap L_n^2$，

(b) 對殆遍的 x，$f(x, \cdot) \in L^2(\mathbf{R})$。

因爲 $f(\cdot, u)$ 爲 x 的線性泛函（因此爲一個 Gauss 隨機變數），故條件(b)等價於 $E[\int f(\cdot, u)^2 du] < \infty$。對於這種 f，我們可以在 E^* 上定義一個變換 T_f：

$$T_f: x \to x + f(x, \cdot), \qquad x \in E^*.$$

於是 $T_f \circ \mu$ 可以定義，而且等價於 μ。

反過來，如果 μ' 爲 Gauss 測度，等價於 μ，則存在唯一的 f 滿足條件(a)與(b)使得 $\mu' = T_f \circ \mu$。

這個結果本身就具有某些興味，並且應用很廣泛，但是我們將放棄去作進一步考慮的機會，因爲若要做這個工作，必須準備更多的背景知識。讀者若對這個論題有興趣的話，我們建議他去讀 L. Shepp (1966)，M. Hitsuda (1968) 與 Yu. A. Rozanov (1971)。我們也要指出，在第 4.6 節 [3] 也討論過有關的論題。

現在讓我們回到群 T，我們要來定義牽涉到 $O^*(E^*)$ 的更大的群。對於乘積集 $O^*(E^*) \times E = \{m = (g^*, \eta) : g^* \in O^*(E^*), \eta \in E\}$，我們引入兩元運算如下：對於 $m_i = (g_i^*, \eta_i)$，$i = 1, 2$，

$$m_1 m_2 = (g_1^* g_2^*, \eta_1 + g_1^* \eta_2). \tag{5.67}$$

集合 $O^*(E^*) \times E$，賦予這個運算，就形成了一個群。我們也可以對這個集合引入位相構造，亦即 $O^*(E^*)$ 的 μ 位相與 E 的核式位相之乘積位相。經過這樣位相化的群，我們記爲 $M(E^*)$ 或 M_∞。

【定義 5.3】

我們稱位相群 $M(E^*)$ ($= M_\infty$) 爲無窮維運動群 (infinite-dimensional motion group)。

$M(E^*)$ 的單位元素爲 $(e^*, 0)$，其中 e^* 爲 $O^*(E^*)$ 的單位元素，並且 (g^*, η) 的逆元素爲 $({g^*}^{-1}, -{g^*}^{-1}\eta)$。

令 $M(E^*)$ 的元素 $m = (g^*, \eta)$ 作用到 E^*，如下：

$$mx = T_\eta(g^* x) = g^* x + \eta, \qquad x \in E^*. \tag{5.68}$$

則$M(E^*)$變成E^*的一個變換群，其行爲跟有限維歐氏空間中的運動群相仿。

【命題 5.8】

白噪聲的測度μ爲M_∞擬不變。

【證明】 由於μ具有$O^*(E^*)$不變性及T_η擬不變性，立即得證本命題。 #

對於$m\in M(E^*)$，我們定義一個單直算子U_m如下：

$$U_m = U_g U_\eta, \qquad m = (g^*, \eta). \tag{5.69}$$

其中U_η爲(5.63)式所定義的單直算子，並且U_g爲第5.1節所給定者。映射$m\to U_m$，$m\in M(E^*)$是連續的，故$(\{U_m : m\in M(E^*)\},(L^2))$爲運動群$M(E^*)$的單直表現。

現在我們要來尋求一個類似於有限維時，連結 Fourier 變換與運動之間的關係。對於無限維的情形，當然需要作一些修飾。設$\mathfrak{F}$爲第4.7節裡所引入的(L^2)上的 Fourier-Wiener 變換，再令

$$V_m = \mathfrak{F} U_m \mathfrak{F}^{-1},$$

$$V_\eta = \mathfrak{F} U_\eta \mathfrak{F}^{-1},$$

並且

$$V_g = \mathfrak{F} U_g \mathfrak{F}^{-1}.$$

當$m=(g^*,\eta)$時，顯然我們有$V_m = V_g V_\eta$。現在我們要來解說這些算子的作用。

【命題 5.9】

對於任意$\eta\in E$與$g\in O(E)$，算子V_η與V_g對(L^2)的作用如下：

$$(V_\eta\varphi)(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}i\langle x,\eta\rangle\right]\varphi(x), \tag{5.70}$$

$$(V_g\varphi)(x) = \varphi(g^*x)(=(U_g\varphi)(x)), \qquad \varphi\in(L^2). \tag{5.71}$$

【證明】 首先我們推導公式(5.70)。令$\psi\in(L^2)$，則我們有

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{J}(U_\eta\psi)(y)\\
&=\int_{E^*}\psi(\sqrt{2}x+\eta+iy)\exp\left[-\frac{1}{2}\langle\sqrt{2}x+iy,\eta\rangle-\frac{1}{4}\|\eta\|^2\right]d\mu(x)\\
&=\exp\left[-\frac{1}{2}i\langle y,\eta\rangle-\frac{1}{4}\|\eta\|^2\right]\int_{E^*}\psi(\sqrt{2}x'+iy)\\
&\quad\times\exp\left[-\frac{1}{2}\langle\sqrt{2}x',\eta\rangle+\frac{1}{2}\|\eta\|^2\right]d\mu(x'-\eta/\sqrt{2})\\
&=\exp\left[-\frac{1}{2}i\langle y,\eta\rangle\right]\int_{E^*}\varphi(\sqrt{2}x'+iy)\,d\mu(x')\\
&=\exp\left[-\frac{1}{2}i\langle y,\eta\rangle\right](\mathfrak{J}\psi)(y).
\end{aligned}
$$

如果我們令 $\varphi=\mathfrak{J}\psi$ ，就得到（5.70）式。

（5.71）式的證明可以仿命題4.14之證明步驟，但需將那裡的T_t改換成g^*，我們把細節略去不提。 #

還有重要的一點是，單直算子U_η跟U_φ與$\mathfrak{J}$ 不同。這個事實表現於，U_φ與$\mathfrak{J}$ 將所有子空間$\mathscr{H}_n$保持不變（亦即$U_\varphi\mathscr{H}_n=\mathscr{H}_n$，$\mathfrak{J}\mathscr{H}_n=\mathscr{H}_n$，$n=0$，1，2，…），而$U_\eta$ 却是改變多重Wiener積分的次數之關鍵算子。爲了描述U_η的作用，由其母算子下手較方便。

固定E的一個單位向量η（即$\|\eta\|=1$），我們觀察到$\{U_{t\eta}:-\infty<t<\infty\}$與$\{V_{t\eta}:-\infty<t<\infty\}$皆爲一參數單直群，對$t$是連續的。於是我們可以利用Stone定理來描述它們的母算子。如果U_t的値譜表現爲

$$U_{t\eta}=\int e^{it\lambda}\,dE_\eta(\lambda),$$

其中$\{E_\eta(\lambda)\}$爲么之分解，則母算子$A_\eta=(d/dt)U_{t\eta}|_{t=0}$可以表成

$$A_\eta=i\int\lambda\,dE_\eta(\lambda).$$

同理也可以得到$B_\eta=(d/dt)V_{t\eta}|_{t=0}$。現在我們可以專注於探求$A_\eta$與$B_\eta$之明白表達式了。

我們先取定某些記號。如前述我們固定 $\eta\in E$，$\|\eta\|=1$，再令 $\varphi(x)$ 爲一個有限維（即馴順）泛函 $\varphi(x)=\widetilde{f}(<x,\widetilde{\xi}_\eta>,\cdots,<x,\widetilde{\xi}_n>)$。然後我們取一個完備么正系統 $\xi_0=\eta$，$\xi_1,\cdots$，$\xi_{n'}$ 張成一個由 η，$\widetilde{\xi}_1,\cdots$，$\widetilde{\xi}_n$ 所生成的向量空間，再將 $\varphi(x)$ 重表爲 $f(<x,\xi_0>,\cdots,<x,\xi_{n'}>)$。如果 $(\partial/\partial t_0)f(t_0,\cdots,t_{n'})$ 存在，我們定義 $(\partial/\partial\eta)$ 爲

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\varphi(x)=\frac{\partial}{\partial t_0}f(t_0,\ldots,t_{n'})\bigg|_{t_j=\langle x,\xi_j\rangle,\ j=0,1,\ldots,n'} \tag{5.72}$$

顯然 $\partial/\partial\eta$ 對於多項式與指數函數都有定義。我們定義另一個算 $\eta^{\#}$ 爲

$$(\eta^{\#}\varphi)(x)=\langle x,\eta\rangle\varphi(x). \tag{5.73}$$

【命題 5.10】

(a) A_η 與 B_η 的定義域都稠密於 (L^2)。

(b) 算子 A_η 與 B_η，當作用到多項式或指數函數時，分別可表成如下:

$$A_\eta=\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{1}{2}\eta^{\#},\ B_\eta=-\frac{1}{2}i\eta^{\#}. \tag{5.74}$$

【證明】 我們利用下面的計算來證明(a)與(b)的斷言，如果 $\varphi(x)$ 爲一多項式或一指數函數，則

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(U_{t\eta}\varphi)(x)\bigg|_{t=0}&=\frac{d}{dt}\left\{\varphi(x+t\eta)\exp\left[-\frac{1}{2}t\langle x,\eta\rangle-\frac{1}{4}t^2\|\eta\|^2\right]\right\}\bigg|_{t=0}\\&=\frac{\partial}{\partial\eta}\varphi(x)-\frac{1}{2}(\eta^{\#}\varphi)(x),\end{aligned}$$

並且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(V_{t\eta}\varphi)(x)\bigg|_{t=0}&=\frac{d}{dt}\left\{\exp\left[-\frac{1}{2}it\langle x,\eta\rangle\right]\varphi(x)\right\}\bigg|_{t=0}\\&=-\frac{1}{2}i(\eta^{\#}\varphi)(x).\end{aligned}$$

對於兩種情形，取極限時我們都採用 (L^2) 範數，所得的結果仍然在 (L^2) 裡。

#

現在我們要來探討算子A_η與B_η如何作用到空間$\mathscr{H}_n$這個重要問題。取一個n次Fourier-Hermite多項式$\varphi(x)$，建基於$L^2(\mathbb{R})$的一個完備的么正系統$\{\xi_j\}$之上：

$$\varphi(x)=\prod_k H_{n_k}\left(\frac{\langle x,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right),\qquad \sum n_k=n.$$

因爲

$$A_{\xi_j}\varphi(x)=\frac{d}{dt}H_{n_j}\left(\frac{\langle x,\xi_j\rangle+t}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{t=0}\prod_{k\neq j}H_{n_k}\left(\frac{\langle x,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}\langle x,\xi_j\rangle\varphi(x),$$

我們有

$$\left\{\begin{aligned}&A_{\xi_j}\varphi(x)=-\frac{1}{\sqrt{8}}\prod_k H_{n'_k}\left(\frac{\langle x,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right), &&\text{若 } n_j=0,\\ &&&(n'_k=n_k,\ k\neq j,\quad \text{且}\quad n'_j=1)\\ &A_{\xi_j}\varphi(x)=\frac{n_j}{\sqrt{2}}\prod_k H_{n'_k}\left(\frac{\langle x,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\prod_k H_{n''_k}\left(\frac{\langle x,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right), &&\\ &&&\text{若 } n_j>0,\\ &&&(n'_k=n''_k=n_k,\ k\neq j,\quad \text{且}\quad n'_j=n_j-1,\ n''_j=n_j+1).\end{aligned}\right. \tag{5.75}$$

詳細情形請參見附錄第A.5節[1]裡的公式。同理我們得到B_{ξ_j}的公式：

$$\begin{aligned}&B_{\xi_j}\varphi(x)=-\frac{i}{\sqrt{8}}\prod_k H_{n'_k}\left(\frac{\langle x,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right), &&\text{當 } n_j=0,\\ &&&(n'_k=n_k,\ k\neq j,\quad \text{且}\quad n'_j=1)\\ &B_{\xi_j}\varphi(x)=-\frac{i}{\sqrt{2}}n_j\prod_k H_{n'_k}\left(\frac{\langle x,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right)-\frac{i}{2\sqrt{2}}\prod_k H_{n''_k}\left(\frac{\langle x,\xi_k\rangle}{\sqrt{2}}\right), &&\\ &&&\text{若 } n_j>0,\\ &&&(n'_k=n''_k=n_k,\ k\neq j,\quad \text{且}\quad n'_j=n_j-1,\ n''_j=n_j+1).\end{aligned} \tag{5.76}$$

因此我們看出A_ξ與B_ξ將$\mathscr{H}_n$中的多項式變成$\mathscr{H}_{n-1}\oplus\mathscr{H}_{n+1}$中的多項式，這個結果跟量子力學的關連可以參考H. Weyl（1928，第二章）。

本節最後部分，我們要來簡略介紹無窮維的Laplace-Beltrami算子Δ。Y. Umemura（1966）引進了算子

$$\Delta=\sum_j\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}-\xi_j\cdot\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right) \tag{5.77}$$

稱爲Laplace算子，並且證明了Δ在(L^2)上具有通常Laplace算子的類似性質。主要的刻劃是下面一個性質：假設(L^2)上的對稱算子H具有足夠大的定義域（例如含有所有指數函數），並且H跟所有U_g，$g\in O(E)$，可交換，則H可表爲Δ的函數，$H=f(\Delta)$。

利用對(L^2)泛函的變數作平移所推演出來的母算子A_η，以及算子$B_\eta=\mathfrak{J}A_\eta\mathfrak{J}^{-1}$，我們可以將$\Delta$表成

$$\Delta=\sum_j\left(A_{\xi_j}^2+B_{\xi_j}^2+\frac{1}{2}\right). \tag{5.78}$$

回想公式（5.75）及（5.76），它們描述着A_{ξ_j}與B_{ξ_j}對建基於$\{\xi_j\}$之Fourier-Hermite多項式$\varphi(x)$的作用，我們立即可以證明

$$\Delta\varphi=-n\varphi,\qquad n=\ \varphi\text{的次數} \tag{5.79}$$

因爲Δ爲無窮多個算子之和，當Δ作用到一般的φ時，就需要考慮這個和的收斂性。有了這些預備，我們就可以來敍述有關Δ的一些結果。

【命題5.11】

Δ爲一個Hermite算子，並且其定義域包含$\Sigma_n\mathscr{H}_n$（代數和）。子空間$\mathscr{H}_n$爲相應於固有值$-n$，$n\geq 0$，之固有空間。

【證明】 由於所有n次Fourier-Hermite多項式構成了$\mathscr{H}_n$的基底，並且對這些多項式Δ皆有定義，又滿足（5.79），故我們可以將Δ延拓成爲定義在$\mathscr{H}_n$上的一個Hermite算子。命題中剩下的敍述立即可以得證。

#

【推論】 命題中延拓後所得的算子Δ，其定義跟完備么正系統$\{\xi_n\}$的取法無關。

下一個命題是上述推論的立即結論。

【命題 5.12】

算子 Δ 跟所有 U_g，$g \in O(E)$，是可交換的，亦即

$$\Delta U_g \varphi = U_g \Delta \varphi, \qquad \varphi \in \sum_n \mathscr{H}_n. \tag{5.80}$$

【命題 5.13】

算子 Δ 可以延拓到定義在所有指數函數類 A 上，其作用如下：

$$\Delta \exp[a\langle x, \xi\rangle] = (a^2\|\xi\|^2 - a\langle x, \xi\rangle)\exp[a\langle x, \xi\rangle]; \qquad a \in \mathrm{C}. \tag{5.81}$$

【證明】 取一組 $\{\xi_n\}$，將給定的 ξ 表成 $\xi = \Sigma_n \alpha_n \xi_n$，則我們得到下式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} - \xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)\exp\left[a \sum_n \alpha_n \langle x, \xi_n\rangle\right]$$
$$= (a^2\alpha_j^2 - a\alpha_j\langle x, \xi_j\rangle)\exp\left[a \sum_n \alpha_n\langle x, \xi_n\rangle\right]$$

對 j 作和，我們得到 (L^2) 收斂的一個式子

$$\Delta \exp[a\langle x, \xi\rangle] = \left(a^2 \sum_n \alpha_n^2 - a \sum_n \langle x, \alpha_n \xi_n\rangle\right)\exp[a\langle x, \xi\rangle]$$

由此就可得到 (5.81) 式。 #

我們已經證明了，延拓後的算子 Δ，其定義域包含 $\Sigma_n \mathscr{H}_n$ 與 A，並且事實上它在許多方面都跟 Laplace-Beltrami 算子相像。

5-8 量子力學的正準交換關係

在有限自由度時，Von Neumann (1931) 所建立的正準交換關係的表現理論，可以推廣到 Boson 場的情形。此時很自然地就會出現 Hilbert 空間 (L^2) 上的白噪聲測度。

讓我們很快地來複習 n 個質點系之 Von Neumann 的結果。在量子力學裡，位置 q_j 與動量 p_j，$j = 1, 2, \cdots, n$，都被解釋爲某個 Hilbert 空間 H 上的自伴算子，滿足下面的交換關係：

$$[q_j, p_k] = ih\delta_{j,k}I,$$
$$[q_j, q_k] = [p_j, p_k] = 0, \quad 1 \le j, k \le n. \tag{5.82}$$

它們可以表現成Hilbert空間$L^2(\mathbf{R}^n)$上的算子，並且這個表現可唯一至單直等價：

$$p_j\varphi(x) = \left(\frac{h}{i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$
$$q_j\varphi(x) = x_j\varphi(x), \quad \varphi \in L^2(\mathbf{R}^n), \tag{5.83}$$

爲了尋求這個表現，Von Neumann由系統$\{p_j, q_k : 1 \le j, k \le n\}$出發，利用下式引進了一組單直算子$\{P(\alpha), Q(\beta) : \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n\}$：

$$P(\alpha) = \exp\left[\left(\frac{i}{h}\right)\sum_j \alpha_j p_j\right], \; Q(\beta) = \exp\left[\left(\frac{i}{h}\right)\sum \beta_k q_k\right].$$

這些算子滿足了所謂的Weyl交換關係：

$$\begin{cases} Q(\alpha)P(\beta) = \exp\left[-\left(\frac{i}{h}\right)(\alpha, \beta)\right]P(\beta)Q(\alpha), \\ P(\alpha)P(\beta) = P(\alpha + \beta), \; Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha + \beta). \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n, \tag{5.84}$$

利用這些關係式，他就可以決定表現的形態。說得更精確一點，整個問題是要找一個Hilbert空間H及一組單直算子$\{P(\alpha), Q(\beta) : \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n\}$滿足下面的條件：(i) $\{P(\alpha), Q(\beta)\}$是不可約的(irreducible)，(ii)(5.84)式之交換關係成立，(iii) $P(\alpha)$與$Q(\beta)$分別對α與β是連續的。爲了簡便起見，以下我們要取常數h爲1。

一個顯表現如下：取H爲$L^2(\mathbf{R}^n)$，並且定義$P(\alpha)$與$Q(\beta)$爲

$$(P(\alpha)\varphi)(x) = \varphi(x + \alpha), \; (Q(\beta)\varphi)(x) = \exp[i(\beta, x)]\varphi(x), \tag{5.85}$$

其中$\varphi \in L^2(\mathbf{R}^n)$。顯然，條件(ii)與(iii)都成立，不可約性(i)由下面的事實也可以導致：對於任意$\varphi \neq 0$，由$\{P(\alpha)Q(\beta)\varphi : \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n\}$所張成的閉線性子空間等於整個空間$L^2(\mathbf{R}^n)$。

現在我們證明唯一性。假設已給一個滿足(ii)與(iii)的表現，令

$$S(\alpha, \beta) = \exp\left[-\frac{1}{2} i(\alpha, \beta)\right] P(\alpha) Q(\beta), \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n.$$

這是一個單直算子，並且我們得到下面的關係式

$$S(\alpha, \beta) S(\gamma, \delta) = \exp\left[\frac{1}{2} i\{(\alpha, \delta) - (\beta, \gamma)\}\right] S(\alpha + \gamma, \beta + \delta), \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}^n, \quad (5.86)$$

我們看出這等價於(5.84)。我們也很容易看出，$S(\alpha, \beta)$的偶伴爲$S(-\alpha, -\beta)$。今令

$$A = \int_{\mathbf{R}^{2n}} \int \exp\left[-\frac{1}{4}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\right] S(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

則A爲H上的一個有界自伴算子，並且有

$$A S(\gamma, \delta) A = (2\pi)^n \exp\left[-\frac{1}{4}(|\gamma|^2 + |\delta|^2)\right] A,$$

特別地，我們有

$$A^2 = (2\pi)^n A.$$

今我們取H的子空間$M = \{ f \in H : Af = (2\pi)^n f \}$。因爲$A$爲一個有界算子，故$M$爲一個閉子空間。$M$的另一個表示法是$\{ Ag : g \in H \}$。我們也看出，對於任意$f \in H \ominus M$，$Af = 0$。今$S(\alpha, \beta)$的作用可以由下面的計算來闡明。對於$f$，$g \in M$，我們有

$$\begin{aligned}
&(S(\alpha, \beta) f, S(\gamma, \delta) g) \\
&\quad = (2\pi)^{-2n} (S(\alpha, \beta) Af, S(\gamma, \delta) Ag) \\
&\quad = (2\pi)^{-2n} (AS(-\gamma, -\delta) S(\alpha, \beta) Af, g) \\
&\quad = (2\pi)^{-2n} \exp\left[\frac{1}{2} i\{(\alpha, \delta) - (\beta, \gamma)\}\right] (AS(\alpha - \gamma, \beta - \delta) Af, g)
\end{aligned}$$

$$= (2\pi)^{-n} \exp\left[-\frac{1}{4}\{|\alpha-\gamma|^2 + |\beta-\delta|^2\} + \frac{1}{2}i\{(\alpha,\delta)-(\beta,\gamma)\}\right](Af, g)$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{4}\{|\alpha-\gamma|^2 + |\beta-\delta|^2\} + \frac{1}{2}i\{(\alpha,\delta)-(\beta,\gamma)\}\right](f, g).$$

因此，若 $\{f_n\}$ 爲 M 中的一組完備么正系統，則我們有

$$\begin{aligned}&(S(\alpha,\beta)f_m, S(\gamma,\delta)f_n)\\&\qquad = \exp\left[-\frac{1}{4}\{|\alpha-\gamma|^2 + |\beta-\delta|^2\} + \frac{1}{2}i\{(\alpha,\delta)-(\beta,\gamma)\}\right]\delta_{m,n}.\end{aligned}$$

當我們固定 f_n 時，$\{S(\alpha,\beta)\}$ 作用到循環子空間

$$M_n = \{S(\alpha,\beta)f_n;\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}^n\}$$

的方式如下：

$$S(\gamma,\delta)f_{\alpha,\beta} = \exp\left[\frac{1}{2}i\{(\beta,\gamma)-(\alpha,\delta)\}\right]f_{\alpha+\gamma,\beta+\delta}, \tag{5.87}$$

其中 $f_{\alpha,\beta} = S(\alpha,\beta)f_n$。因此對於任意 γ，δ 我們有

$$(S(\gamma,\delta)f_{\alpha,\beta}, f_{\alpha,\beta}) = \exp\left[-\frac{1}{4}(|\gamma|^2 + |\delta|^2) + i\{(\beta,\gamma)-(\alpha,\delta)\}\right], \tag{5.88}$$

並且右項跟 f_n 的選取法無關。但這意指，系統 $\{S(\alpha,\beta)\}$ 唯一決定至單直等價。事實上，如果我們取另一個 f'_n，並且利用 $S(\alpha,\beta)f'_n = f'_{\alpha,\beta}$ 來定義 M'_n，則（5.88）仍然成立，故映射

$$U: \sum_k c_k S(\alpha_k,\beta_k)f_n \to \sum_k c_k S(\alpha_k,\beta_k)f'_n$$

可以延拓成 M_n 到 M'_n 的保距變換。

顯然 $\{S(\alpha,\beta)\}$ 在每個 M_n 上是不可約的，因此我們已經證明了：滿足 (i)，(ii) 及 (iii) 的系統 $\{P(\alpha), Q(\beta)\}$ 唯一決定，並且等價於（5.85）式所給定的系統。此地要注意的一個事實是，$S(\alpha,\beta)$ 在子空間

$H \ominus M$ 上會化約成零算子。

到現在爲止的討論，算子 P 與 Q 扮演了對稱的角色。由（5.85）之顯式，我們發現它們被 Fourier 變換連結如下：

$$\mathscr{F}^{-1}P(\alpha)\mathscr{F} = Q(\alpha), \quad \text{或等價地} \quad \mathscr{F}Q(\alpha)\mathscr{F}^{-1} = P(\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{R}^n.$$

令（α，β，θ）表示 $P(\alpha)$，$Q(\beta)$ 以及乘以常數 $e^{-i\theta}$ 這三件事；其中 $e^{-i\theta}$ 的絕對值爲 1，故它定義了一個單直算子。在這個記號之下，乘積

$$\begin{aligned} e^{-i\theta_1}P(\alpha_1)Q(\beta_1)e^{-i\theta_2}P(\alpha_2)Q(\beta_2) &= e^{-i(\theta_1+\theta_2)}P(\alpha_1)Q(\beta_1)P(\alpha_2)Q(\beta_2) \\ &= e^{-i(\theta_1+\theta_2)-i(\beta_1,\alpha_2)}P(\alpha_1+\alpha_2)Q(\beta_1+\beta_2) \end{aligned}$$

可以表成下形：

$$(\alpha_1, \beta_1, \theta_1)(\alpha_2, \beta_2, \theta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \theta_1 + \theta_2 + (\beta_1, \alpha_2)). \tag{5.89}$$

如果我們在集合

$$G_n = \{(\alpha, \beta, \theta) : \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n, \theta \in \mathbf{T}^1\} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^1,$$

上引進（5.89）之乘法運算，其中 $\mathbf{T}^1$ 表示 1 維之環面（torus），則我們就得到一個群 G_n。復次，如果我們把 G_n 看作是兩個 $\mathbf{R}^n$ 與 $\mathbf{T}^1$ 的位相乘積，則 G_n 變成一個位相群，事實上是一個 Lie 群。由（5.89）可知，映射

$$g = (\alpha, \beta, \theta) \to U_g = e^{-i\theta}P(\alpha)Q(\beta), \quad g \in G_n \tag{5.90}$$

定義了 G_n 的一個單直表現。現在我們已經證實了，本節早先的討論所斷言的：存在 G_n 的唯一不可約之單直表現。這個說法導致我們要考慮 Boson 場的交換關係之單直表現。

位相群 G_n 同構於 Heisenberg 群的因子群，後者我們將在第 7.3 節裡介紹。

現在我們要把群 G_n 推廣到 $n = \infty$ 的情形，令 E 爲一個核式空間，且 $G_E = \{(\xi, \eta, \theta) : \xi, \eta \in E, \theta \in \mathbf{T}^1\} = E \times E \times \mathbf{T}^1$。我們對 G_E 引進乘法運算：對於（ξ_i，η_i，θ_i）$\in G_E$，$i = 1, 2$，定義

$$(\xi_1, \eta_1, \theta_1)(\xi_2, \eta_2, \theta_2) = (\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2, \theta_1 + \theta_2 + (\eta_1, \xi_2)). \tag{5.91}$$

配上這個乘法運算，G_B就變成一個群了。如果再賦予乘積位相（如同G_n的情形），則G_B就變成一個位相群。一般而言，一個位相群稱為一個核式Lie群（nuclear Lie group），如果存在單位元素的一個近旁，使得跟核式空間零元的某一近旁同構。剛才所定義的G_B，恰好是核式Lie群的一個例子。

容易看出，核式Lie群G_B由（ξ，0，0）與（0，η，0），η，$\xi \in E$所生成。假設我們已給出G_B的一個單直表現，並且令$P(\xi)$與$Q(\eta)$分別為相應於（ξ，0，0）與（0，η，0）的單直算子。G_B的中心由元素$\{(0,0,\theta):\theta\in \mathbf{T}^1\}\simeq \mathbf{T}^1$構成的，並且如果單直表現是不可約的，我們就可以把乘法算子$e^{-i\theta}$跟（0，0，θ）牽連起來。利用分解式$(\xi,\eta,0)=(\xi,\eta,0)(0,0,\theta)$，以及公式$(0,\eta,0)(\xi,0,0)=(\xi,\eta,(\eta,\xi))$，$(\xi_1,0,0)(\xi_2,0,0)=(\xi_1+\xi_2,0,0)$，及$(0,\eta_1,0)(0,\eta_2,0)=(0,\eta_1+\eta_2,0)$（這些都是（5.91）式之特例），我們就得到下面的交換關係：

$$Q(\eta)P(\xi)=e^{-i(\xi,\eta)}P(\xi)Q(\eta),$$
$$P(\xi_1)P(\xi_2)=P(\xi_1+\xi_2),\qquad Q(\eta_1)Q(\eta_2)=Q(\eta_1+\eta_2).\tag{5.92}$$

這可以看作是（5.84）的延拓。

在Boson場的情形（自由度為連續統的基數），上面的式子描述了Weyl交換關係，下面我們就來加以闡明。在這種情形，一個形式的做法牽涉到滿足交換關係$[q_t,p_{t'}]=i\hbar\delta_{t-t'}$及$[p_t,p_{t'}]=[q_t,q_{t'}]=0$的一組自伴算子$\{p_t,q_t:t\in\mathbf{R}\}$。讓我們"塗污"這些算子，由$\{p_t\}$與$\{q_t\}$分別建構出$p(\xi)=\langle p,\xi\rangle$（或更形式地，$p(\xi)=\int\xi(t)p_t dt$）以及$q(\eta)=\langle q,\eta\rangle$。於是自伴算子$p(\xi)$與$q(\eta)$滿足$[q(\eta),p(\xi)]=i(\xi,\eta)\hbar I$，與$[p(\xi),p(\eta)]=[q(\xi),q(\eta)]=0$。指數化，我們就得到單直算子$P(\xi)=\exp[ip(\xi)]$與$Q(\eta)=\exp[iq(\eta)]$所滿足的（5.92）式。

現在我們的目標就是要來尋找核式Lie群G_B的所有可能的不可約表現。說得更明確一點，我們要找H上的一組單直算子$\{P(\xi),Q(\eta):\xi,\eta\in E\}$滿足下面條件：(i) $\{P(\xi),Q(\eta)\}$在H上是不可約的，(ii)（5.92

）之交換關係成立，(iii) $P(\xi)$ 與 $Q(\eta)$ 分別是 ξ 與 η 之連續函數。

從純形式的觀點來看，我們對這個問題所採取的策略跟有限自由度 G_n 的情形相同。但是此地却發生一個嚴重的困難，因爲缺少如 $\mathbb{R}^n$ 之 Lebesgue 測度。有了這個了解，我們採用 I. M. Gelfand 與 N. Ya Vilenkin（1964），Y. Umemura（1965）的辦法來討論這個問題。

先對 G_B 的子群 $\{(0, \xi, 0): \xi \in E\}$ 建立一個循環的單值表現。假設 $f \in H$ 爲么模之循環向量，並且令

$$C(\xi) = (Q(\xi)f, f),$$

則 $C(0)=1$，且 $C(\xi)$ 對 ξ 是連續的。復次，對於 $\alpha_j \in C$，$\xi_j \in E$，$j = 1, 2, \cdots, n$，我們有

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \bar{\alpha}_k C(\xi_j - \xi_k) &= \sum_{j,k} \alpha_j \bar{\alpha}_k (Q(\xi_j - \xi_k)f, f) \\ &= \sum_{j,k} (\alpha_j Q(\xi_j)f, \alpha_k Q(\xi_k)f) \qquad [Q(-\xi_k) = Q(\xi_k)^*] \\ &= \left\| \sum_j \alpha_j Q(\xi_j) f \right\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

換言之，C 是正定的。由 Bochner-Minlos 定理（定理 3.1）得知，在 E^* 上存在一個測度 μ 使得

$$C(\xi) = \int_{E^*} \exp[i\langle x, \xi\rangle] \, d\mu(x),$$

因此我們就建構了 Hilbert 空間 $L^2(E^*, \mu) = (L^2)$。

到現在爲止，Hilbert 空間 H 都是了解成抽象的 Hilbert 空間，不過我們可以具體地加以實現：引入一個從 H 到 $L^2(E^*, \mu)$ 的映射，定義爲

$$U: g = \sum_j a_j Q(\xi_j) f \to Ug = \sum_j a_j \exp[i\langle x, \xi_j\rangle] \in (L^2).$$

因爲我們所處理的是循環表現 (cyclic representation)，利用類似於第 4.2 節定理 4.1 的討論，我們可以將 U 延拓成從 H 到 (L^2) 的保距映射。復次，對於上述的 g，我們有

$$UQ(\xi)g = U\left(\sum_j a_j Q(\xi_j + \xi)f\right)$$
$$= \sum_j a_j \exp[i\langle x, \xi_j + \xi\rangle] = e^{i\langle x, \xi\rangle} \cdot Ug,$$

因此對於 $\varphi \in (L^2)$，下式成立：

$$(UQ(\xi)U^{-1})\varphi(x) = \exp[i\langle x, \xi\rangle] \cdot \varphi(x).$$

從今起我們要將 H 與 (L^2) 等同起來，從而將 $UQ(\xi)U^{-1}$ 簡記成 $Q(\xi)$。因此我們已定出 G_B 的子群 $\{(0, \xi, 0)\}$ 的一個循環單直表現：

$$Q(\xi)\varphi(x) = \exp[i\langle x, \xi\rangle] \cdot \varphi(x), \qquad \varphi \in (L^2). \tag{5.93}$$

其次我們要來探討，在空間 (L^2) 上使 $Q(\xi)$ 取固定值的子群之表現 $\{P(\xi)\}$。記 $1(x)$ 表示恒等於 1 之 (L^2) 泛函，再令 $(P(\xi)1)(x) = \psi_\xi(x)$。由（5.92）之交換關係得到

$$(Q(\eta)\psi_\xi, \psi_\xi)_{(L^2)} = \int \exp[i\langle x, \eta\rangle] |\psi_\xi(x)|^2 \, d\mu(x)$$
$$= (\exp[-i(\xi, \eta)]P(\xi)Q(\eta)1, P(\xi)1)$$
$$= \exp[-i(\xi, \eta)] \int \exp[i\langle x, \eta\rangle] \cdot |1(x)|^2 \, d\mu(x)$$
$$= \int \exp[i\langle x - \xi, \eta\rangle] \, d\mu(x)$$
$$= \int \exp[i\langle x, \eta\rangle] \, dT_\xi \circ \mu(x)$$

（參見第5.7節之記號）。因此，爲了 $P(\xi)$ 存在爲 (L^2) 上的單直算子，μ 必須具有 T_ξ 擬不變性。如果這個條件成立，則有

$$\frac{dT_\xi \circ \mu}{d\mu} = |\psi_\xi|^2. \tag{5.94}$$

此式成立是因爲特徵泛函與機率測度之間有對射關係的原故，因此我們可以寫成

$$\psi_\xi(x) = d(\xi, x)\left(\frac{dT_\xi \circ \mu}{d\mu}(x)\right)^{1/2}, \tag{5.95}$$

其中 d 爲滿足 $|d(\xi, x)| = 1$，對 (μ) 殆遍，之泛函。此時我們再重新引進 $Q(\xi)$：把泛函 $\varphi(x) = \Sigma_j a_j \exp[i\langle x, \xi_j\rangle]$ 表成形如 $\Sigma_j a_j (Q(\xi_j)1)(x)$，因此

$$P(\xi)\varphi(x) = \sum_j a_j \exp[i(\xi, \xi_j)]\exp[i\langle x, \xi_j\rangle](P(\xi)1)(x)$$
$$= \varphi(x+\xi)\psi_\xi(x).$$

這個結果可以延拓成對於一般的 (L^2) 泛函 φ 也成立，再配合上（5.95）式，我們就得到

$$P(\xi)\varphi(x) = \varphi(x+\xi)\, d(\xi, x)\left(\frac{dT_\xi \circ \mu}{d\mu}(x)\right)^{1/2}, \qquad \varphi \in (L^2). \tag{5.96}$$

在等式 $P(\xi_1+\xi_2) = P(\xi_1)P(\xi_2)$ 的光照下，考慮（5.96）式，我們就進一步得到有關 d 的必要條件：

$$d(\xi_1, x)\, d(\xi_2, x+\xi_1) = d(\xi_1+\xi_2, x). \tag{5.97}$$

另一方面，如果 μ 是 T_ξ 擬不變的，並且 d 爲滿足 $|d| = 1$ 與（5.97）之泛函，則由（5.93）與（5.96）所定義的 $Q(\xi)$ 與 $P(\xi)$ 是連續的，單直的，並且滿足（5.92）之交換關係。因此我們已經證明了：

【定理 5.10】

設 μ 爲 E^* 的 T_ξ 擬不變測度（$\xi \in E$），且 d 爲絕對值是 1 之泛函，滿足（5.97），則（5.93）與（5.96）給出了核式 Lie 群 G_E 的一個循環單直表現：

$$g = (\xi, \eta; \theta) \to e^{-i\theta}P(\xi)Q(\eta), \qquad g \in G_E. \tag{5.98}$$

【例 1】

設 μ 爲白噪聲測度，取 $d(x, \xi) = 1$，並且定義算子 $P(\xi)$ 與 $Q(\eta)$

如下：

$$(P(\xi)\varphi)(x) = \varphi(x+\xi)\exp\left[-\frac{1}{2}\langle x, \xi\rangle - \frac{1}{4}\|\xi\|^2\right],$$

$$(Q(\eta)\varphi)(x) = \exp[i\langle x, \eta\rangle]\varphi(x), \qquad \varphi \in (L^2).$$

容易看出這些算子分別對 ξ 與 η 是連續的，並且滿足（5.92）之交換關係。

次一個問題是有關這個表現的不可約性的問題。一個表現 $\{P(\xi), Q(\eta)\}$ 不可約的充要條件是算子 V 跟所有的 $P(\xi)$ 可交換，並且所有的 $Q(\eta)$ 必須形如 cI，其中 c 爲一常數。令 V 爲一個這種算子，並且置 $V1(x) = V(x)$。因爲 V 跟 $Q(\eta)$ 可交換，故有 $\exp[i\langle x, \eta\rangle]V(x)$ $(=(Q(\eta)V1)(x) = V\exp[i\langle x, \eta\rangle])$，從而 $(V\varphi)(x) = V(x)\varphi(x)$ 對任意 $\varphi \in (L^2)$ 皆成立。由 V 與 $P(\xi)$ 可交換的進一步假設，可知 $P(\xi)V(x) = V(x)(P(\xi)1)(x) = V(x)\psi_\xi(x)$，亦即 $V(x+\xi)\psi_\xi(x) = V(x)\psi_\xi(x)$，$\forall x \in E^*$。因爲 $\psi_\xi(x) \neq 0$，殆遍 (μ)，故我們必有

$$V(x+\xi) = V(x), \quad \text{殆遍} \ (\mu), \qquad \forall \xi \in E.$$

爲了由此式推出 $V(x) =$ 常數，殆遍 (μ)，只要假設 μ 具有 T_ξ 遍歷性就夠了。因此我們已經證明了：

【命題 5.14】

如果 μ 爲 T_ξ 遍歷，則定理 5.10 所給出的表現是不可約的。

由第 5.7 節定理 5.8 可知，上述例 1 是一個不可約表現。

最後我們討論表現的單直等價性。由定理 5.10 可知，當我們建構 G_E 的表現時，我們有某種程度的自由來選取 μ 與 $d(\xi, x)$。

【命題 5.15】

假設我們利用 (μ, d) 與 (μ', d') 由定理 5.10 已經建構了兩個不可約的表現。那麼這兩個表現是單直等價的，若且唯若下面兩個條件成立：

1. μ 與 μ' 是等價的；
2. 存在一個泛函 $K(x)$，其絕對值爲 1，使得

$$\frac{d(\xi, x)}{d'(\xi, x)} = K(x+\xi)K(x). \tag{5.99}$$

【證明】 假設 $\{P(\xi), Q(\eta)\}$ 與 $\{P'(\xi), Q'(\eta)\}$ 爲由 (μ, d) 與 (μ', d') 分別所建構出來的兩個表現。這兩個表現爲單直等價的充要條件是在 $L^2(E^*, \mu')$ 中存在一個 (μ') 殆遍非零的泛函 $\varphi_0(x)$。使得 $\int |\varphi_0(x)|^2 d\mu'(x)=1$ 且對所有 $\xi, \eta \in E$ 滿足

$$(P(\xi)Q(\eta)1, 1)_{L^2(E^*, \mu)} = (P'(\xi)Q'(\eta)\varphi_0, \varphi_0)_{L^2(E^*, \mu')} \tag{5.100}$$

特別地，如果我們令 $\xi = 0$，則得到

$$\int \exp[i\langle x, \eta\rangle]\, d\mu(x) = \int \exp[i\langle x, \eta\rangle]\,|\varphi_0(x)|^2\, d\mu'(x),$$

從而 $d\mu = |\varphi_0|^2 d\mu'$。今定義 $K(x)$ 爲

$$\varphi_0(x) = K(x)\left(\frac{d\mu}{d\mu'}(x)\right)^{1/2}.$$

於是由 (5.100) 對所有 η 都成立的事實，就證明了 (5.99) 式。 #

【例 2】

取白噪聲的測度 μ_σ，以 ρ^2 爲變異數。因爲 μ_σ 爲 T_ξ 遍歷，利用命題 5.14 可以建構出不可約表現。如果 $\sigma_1 \neq \sigma_2$，則 μ_{σ_1} 與 μ_{σ_2} 兩個測度是互相奇異的。因此，不論 d 如何選取，利用它們所做出的單直表現並不單直等價。

由這個例子我們得到一個結論：對於 G_B 存在有不可列多個互相不等價的單直表現。

第六章

複的白噪聲

複的Gauss系統是最重要的一族複值隨機變數，本章我們就開始來講述這個系統的一般背景知識。然後我們觀察到，複的白噪聲，即第3章白噪聲之複化，是一個複的Gauss系統。複的白噪聲之泛函可以看作是複的Brown運動之泛函，並且對於這種泛函之解析不但有助於研究隨機過程，而且也具有廣泛的應用。因此，探討把它們表成具體的形式並且發展一套解析它們的方法，變成是一個很重要的問題（第6.2節—6.3節）。另一方面，研究複的白噪聲所決定出的複荷佈空間上的機率測度，自動就出現了無窮維單直群。這個單直群在此地所扮演的角色相當於無窮維旋轉群在描述白噪聲的性質時所起的作用（第7.1節）。有趣的是，這個群跟微分方程論與量子力學具有密切關係（第7.5節—7.6節）。

很自然地，我們要問：爲何必須將白噪聲與旋轉群作複化？我們發現這有許多答案。首先(1)在複化的空間上我們可以毫無困難地使用Fourier變換，這是泛函分析裡一個很基本的操作；(2)單直群可以視爲旋轉群的複化，並且如有限維空間的情形，前者比後者更容易對付。特別地，我們的單直群涉及了Fourier變換；(3)在複的白噪聲空間上我們可以發展解析泛函（holomorphic functional）的理論（無窮多變數）；並且(4)如許多實際例子所示，將分析學應用到資訊的數學理論與量子力學時，複值隨機變數具有一定的作用。詳細情形，下面就來講述。

6.1 複的Gauss系統

本節我們要爲以後諸節的討論作預備，我們要講的內容最好可以看作是第1.6節的推廣。首先我們來定義什麼是複的Gauss系統。

設$Z(\omega)$爲機率空間$(\Omega, \mathbf{B}, P)$上的一個複值隨機變數。記$Z(\omega)$的平均值爲$m \in \mathbf{C}$，再分別記$Z(\omega)-m$的實部與虛部爲$X(\omega)$與$Y(\omega)$，於是我們有

$$Z(\omega)=m+X(\omega)+iY(\omega)\qquad i=\sqrt{-1}. \tag{6.1}$$

【定義 6.1】

如果（6.1）中的$X(\omega)$與$Y(\omega)$是獨立的，並且具有Gauss 分佈，平均值爲0，則稱$Z(\omega)$爲**複的Gauss 隨機變數**，或簡稱$Z(\omega)$爲複Gauss 型。

這個定義所要求的條件比只要求(X,Y)爲實的Gauss 型（第1.6節之意味）還要來得強。事實上，爲了要得到類似於實的Gauss 系統的性質（例如定理1.10），這種強化的條件是必要的。

由定義很容易得知，一個複Gauss 隨機變數$Z(\omega)$的機率分佈，只要由其平均值m及變異數$E\{|Z-m|^2\}$就決定了。

【定義 6.2】

設$\mathscr{Z}=\{Z_\lambda(\omega):\lambda\in\Lambda\}$爲一組複值隨機變數。如果任意有限線性組合$\sum_j c_j Z_{\lambda_j}$，$c_j\in\mathbf{C}$，都是複Gauss 型，則稱$\mathscr{Z}$爲一個複Gauss 系統（Complex Gaussian system）或簡稱爲複Gauss 型（Complex Gaussian）。

如果$\mathscr{Z}$爲一個複Gauss 系統，則任何子系統$\mathscr{Z}'\subseteq\mathscr{Z}$仍爲複Gauss 型，並且$\bar{\mathscr{Z}}=\{\bar{Z}_\lambda(\omega):\lambda\in\Lambda\}$也是複Gauss 型，其中$\bar{Z}$表示$Z$之共軛。下面我們要敍述出，在這些定義之下的一些簡單推論。

【命題 6.1】

假設$\mathscr{Z}=\{Z_\lambda(\omega):\lambda\in\Lambda\}$爲一個複Gauss 系統，具有如（6.1）式之分解$Z_\lambda=m_\lambda+X_\lambda+iY_\lambda$。然則，實部$\mathscr{X}=\{X_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$，虛部$\mathscr{Y}=\{Y_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$以及併聯$\mathscr{X}\cup\mathscr{Y}$三個系統都是實的Gauss 系統。

［證明］　由定義6.2及1.6立即得知$\mathscr{X}$與$\mathscr{Y}$兩系統均爲實Gauss 系統。其次，將線性組合$\sum c_j X_{\lambda_j}+\sum d_k Y_{\lambda_k}$視爲$\sum c_j Z_{\lambda_j}-\sum i d_k Z_{\lambda_k}$，$c_j$，$d_k\in\mathbf{R}$的實部，就證明了$\mathscr{X}\cup\mathscr{Y}$爲一個實的Gauss 系統。　#

【命題6.2】

設$\mathscr{Z}=\{Z_\lambda(\omega):\lambda\in\Lambda\}$爲一組獨立的隨機變數。如果每個$Z_\lambda$($\lambda\in\Lambda$)皆爲複Gauss隨機變數，則$\mathscr{Z}$爲一個複Gauss系統。

[證明] 我們只需證明任何兩個Z_λ的線性組合皆爲複Gauss隨機變數就好了。如(6.1)式，記$Z_{\lambda_j}=m_j+X_j+iY_j$，並且取$c_j=a_j+ib_j$，$a_j$，$b_j\in\mathbf{R}$，$j=1$，2，於是我們有

$$c_1Z_{\lambda_1}+c_2Z_{\lambda_2}=c_1m_1+c_2m_2+(a_1X_1-b_1Y_1+a_2X_2-b_2Y_2)$$
$$+i(a_1Y_1+b_1X_1+a_2Y_2+b_2X_2).$$

注意到，$\{X_j,Y_j:j=1,2\}$爲一實Gauss系統。因爲上式右項(扣去平均值之後)的實部與虛部，其變異數相等，並且它們的協方差等於0，故我們看出，$c_1Z_{\lambda_1}+c_2Z_{\lambda_2}$爲一個複Gauss隨機變數。 #

【命題6.3】

設$\mathscr{Z}=\{Z_\lambda(\omega):\lambda\in\Lambda\}$爲一個複Gauss系統。那麼$Z_{\lambda_1}$與$Z_{\lambda_2}$($\in\mathscr{Z}$)爲獨立的充要條件是它們的協方差$E\{(Z_{\lambda_1}-m_{\lambda_1})(\overline{Z_{\lambda_2}-m_{\lambda_2}})\}=0$，其中$m_{\lambda_j}=E\{Z_{\lambda_j}\}$，$j=1$，2爲平均值。

[證明] 必要性是顯然的，故我們來證明充分性。

將Z_{λ_1}與Z_{λ_2}寫成前一個命題中的形式，它們的協方差等於0的條件是

$$E\{(X_1+iY_1)(X_2-iY_2)\}=0$$

由此得到兩個等式

a. $E\{X_1X_2\}+E\{Y_1Y_2\}=0.$

b. $E\{Y_1X_2\}-E\{X_1Y_2\}=0.$

但是因爲$\mathscr{Z}$爲一個複Gauss系統，故$Z_{\lambda_1}+Z_{\lambda_2}$與$Z_{\lambda_1}+iZ_{\lambda_2}$兩者都是複Gauss隨機變數。於是兩者的實部與虛部是互相獨立的，從而我們得到下面兩式：

c. $E\{Y_1 X_2\} + E\{X_1 Y_2\} = 0$,

d. $E\{X_1 X_2\} - E\{Y_1 Y_2\} = 0$.

四個等式(a)，(b)，(c)及(d)合起來，就證明了$\{X_1, X_2, Y_1, Y_2\}$爲一組實的獨立 Gauss 隨機變數，從而證明了Z_{λ_1}與Z_{λ_2}是獨立的。 #

設複 Gauss 系統$\mathscr{Z} = \{Z_\lambda(\omega) : \lambda \in \Lambda\}$的平均值向量記爲$(m_\lambda : \lambda \in \Lambda)$，並且其協方差矩陣記爲$(V_{\lambda,\mu} : \lambda, \mu \in \Lambda)$。

【命題 6.4】

一個複 Gauss 系統$\mathscr{Z} = \{Z_\lambda(\omega) : \lambda \in \Lambda\}$的協方差矩陣$(V_{\lambda,\mu} : \lambda, \mu \in \Lambda)$滿足下列條件：

1. 正定性；
2. 若$Z_\lambda = m_\lambda + X_\lambda + iY_\lambda$〔如（6.1）式〕，則有

$$\begin{cases} E\{X_\lambda X_\mu\} = E\{Y_\lambda Y_\mu\} = \dfrac{1}{2}\operatorname{Re} V_{\lambda,\mu}, \\ -E\{X_\lambda Y_\mu\} = E\{Y_\lambda X_\mu\} = \dfrac{1}{2}\operatorname{Im} V_{\lambda,\mu}. \end{cases} \tag{6.2}$$

（Re 與 Im 分別表示實部與虛部）。

【證明】 1.是顯然的。欲證 2，只要考慮$m_\lambda \equiv 0$的情形就好了。因爲Z_λ, Z_μ及$Z_\lambda + iZ_\mu$皆爲複 Gauss 隨機變數，由它們的實部與虛部是獨立的，就得到$E\{X_\lambda X_\mu\} = E\{Y_\lambda Y_\mu\}$。又因爲$Z_\lambda + Z_\mu$爲複 Gauss 型，故得$E\{X_\lambda X_\mu\} = -E\{Y_\lambda Y_\mu\}$。剩下來的證明由$Z_\lambda$與$Z_\mu$的協方差表示式及上述得到的等式就完成了。 #

【定理 6.1】

對於任意給定的向量$(m_\lambda : \lambda \in \Lambda)$及正定方陣$(V_{\lambda,\mu} : \lambda, \mu \in \Lambda)$，恒存在一個複 Gauss 系統$\mathscr{Z} = \{Z_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$，其平均值向量及協方差矩陣恰好是上述所給者。復次，此系統的機率分佈是唯一的。

[證明] 取一個集合Λ'，跟Λ具有相等的基數，並且在Λ與Λ'之間取一個對射$\lambda \to \lambda'$。利用$V_{\lambda,\mu}$在$\Lambda \cup \Lambda'$上定義一個矩陣（$v_{\lambda,\mu}$：λ，$\mu \in \Lambda \cup \Lambda'$），如下：

$$v_{\lambda,\mu} = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, V_{\lambda,\mu} & 若\ \lambda,\mu \in \Lambda \quad 或 \quad \lambda,\mu \in \Lambda', \\ -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\, V_{\lambda,\mu} & 若\ \lambda \in \Lambda, \mu \in \Lambda', \\ \frac{1}{2}\mathrm{Im}\, V_{\lambda,\mu} & 若\ \lambda \in \Lambda', \mu \in \Lambda. \end{cases}$$

可以證明（$v_{\lambda,\mu}$）是正定的，故由第1.6節之定理1.10可知，存在一個實Gauss系統$\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda \cup \Lambda'\}$，具有平均值爲0，及協方差矩陣（$v_{\lambda,\mu}$）。令

$$X_\lambda = U_\lambda,\ \lambda \in \Lambda,$$
$$Y_\lambda = U_{\lambda'},\ \lambda \in \Lambda',$$

並且

$$Z_\lambda = m_\lambda + X_\lambda + iY_\lambda, \qquad \lambda \in \Lambda.$$

於是容易看出，$\{Z_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$爲一個複Gauss系統，滿足所要求的條件。

最後證明唯一性，即兩個系統若滿足所述條件，則有相同的機率分佈。這由命題6.4及系統$\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda \cup \Lambda'\}$之唯一性結果就得證了。 #

【例1】

設$\{B_1(t,\omega) : t \geq 0\}$與$\{B_2(t,\omega) : t \geq 0\}$爲兩個互相獨立的Brown運動。定義$\mathscr{Z} = \{Z(t,\omega) : t \geq 0\}$爲

$$Z(t,\omega) = 2^{-1/2}[B_1(t,\omega) + iB_2(t,\omega)]. \tag{6.3}$$

則$\mathscr{Z}$爲複Gauss系統，具有平均向量0與協方差矩陣（$t \wedge s : t, s \geq 0$）

$$E\{Z(t)\overline{Z(s)}\} = \frac{1}{2}E\{[B_1(t)+iB_2(t)][B_1(s)-iB_2(s)]\} = t\wedge s.$$

這個系統無它，只不過是第2.3節所定義的複Brown運動。

現在我們來探討複Gauss隨機變數的各級矩。

【命題6.5】

設$Z(\omega)$爲一個複Gauss隨機變數，則有

$$E\{\exp[i(tZ+s\bar{Z})]\} = \exp[i(tm+s\bar{m})-ts\sigma^2] \tag{6.4}$$

其中t與s爲任意複數，$m=E(Z)$且$\sigma^2=E\{|Z-m|^2\}$。

［證明］ 將Z寫成（6.1）式之形，再利用積分公式：

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[ax-\frac{x^2}{\sigma^2}\right]dx = \exp\left[\frac{a^2\sigma^2}{4}\right],\quad a\in\mathbf{C}. \qquad \#$$

［推論］ 假設Z爲一複Gauss隨機變數且$E\{Z\}=0$，則$E\{\exp[tZ]\}\equiv 1$，$t\in\mathbf{C}$；因此Z的各級矩皆存在且

$$\begin{cases} E\{Z^n\}=0, & n>0, \\ E\{Z^n\bar{Z}^m\}=\delta_{n,m}n!\,E\{|Z|^2\}^n. \end{cases} \tag{6.5}$$

因此我們可以計算Z與$\bar{Z}$的某些函數之各級矩，特別地，可以計算多項式的各級矩。但是，若要分析更一般的函數，引入下面的複Hermite多項式是有助益的〔參見K. Itô（1953a）〕。

【定義6.3】

設$z\in\mathbf{C}$爲一個複數，則我們稱多項式

$$H_{p,q}(z,\bar{z}) = (-1)^{p+q}e^{|z|^2}\frac{\partial^{p+q}}{\partial\bar{z}^p\,\partial z^q}e^{-|z|^2}\qquad p,q\geq 0 \tag{6.6}$$

爲(p,q)次複Hermite多項式。

事實上，$H_{p,q}(z,\bar{z})$對z是p次多項式，對$\bar{z}$是q次多項式。一個顯公式如下：

$$H_{p,q}(z,\bar{z})=\sum_{k=0}^{p\wedge q}(-1)^k\frac{p!q!}{k!(p-k)!(q-k)!}z^{p-k}\bar{z}^{q-k}. \tag{6.7}$$

在本書末的附錄A.5裡，我們列有這個多項式的性質以及相關的公式；此地我們列出少數幾個馬上要用到的公式：

$$\overline{H_{p,q}(z,\bar{z})}=H_{q,p}(z,\bar{z}). \tag{6.8}$$

$H_{p,q}$的生成函數

$$\sum_{p,q=0}^{\infty}\frac{s^pt^q}{p!q!}H_{p,q}(z,\bar{z})=\exp[-st+t\bar{z}+sz], \qquad s,t\in\mathbf{C}. \tag{6.9}$$

$$\{(p!q!)^{-1/2}H_{p,q}(z,\bar{z});\ p,q\geq 0\} \tag{6.10}$$

為空間

$$L^2(\mathbf{C},\pi^{-1}\exp(-|z|^2)\,dxdy), \qquad z=x+iy.$$

中的一組完備么正系統。

【命題6.6】

設$Z(\omega)$為$(\Omega,\mathbf{B},P)$上的一個複Gauss隨機變數，平均值為0，變異數為1，則下面一組$Z(\omega)$的函數：

$$\{(p!q!)^{-1/2}H_{p,q}(Z(\omega),\overline{Z(\omega)});\ p,q\geq 0\}$$

為$L^2(\Omega,P)$中的么正系統。

［證明］ 這只不過是(6.10)式的改述。 #

6.2 白噪聲的複化

現在讓我們回來探討白噪聲$(E^*,\mathfrak{B},\mu)$。如本章開頭所述，我們要考慮它的複化。

設E，E^*如第 5.1 節所述，我們作複化如下：

$$E_c = E + iE, \qquad i = \sqrt{-1},$$
$$E_c^* = E^* + iE^*. \tag{6.11}$$

E_c的一個元素ζ及E_c^*的一個元素z可以分別寫成下形：

$$\zeta = \xi + i\eta \qquad \xi, \eta \in E,$$
$$z = x + iy \qquad x, y \in E^*. \tag{6.12}$$

連結E與E^*的正準雙線性形式$\langle x, \zeta \rangle$，可以自然地推廣成連結E_c與E_c^*的雙線性形式$\langle z, \zeta \rangle$，$z \in E_c^*$，$\zeta \in E_c$。很容易可以證明，透過這個推廣的雙線性形式，E_c^*變成E_c的共軛空間。事實上，如果z，ζ表成(6.12)式之形，則我們有

$$\langle z, \zeta \rangle = (\langle x, \xi \rangle + \langle y, \eta \rangle) + i(-\langle x, \eta \rangle + \langle y, \xi \rangle). \tag{6.13}$$

在E^*($\cong iE^*$)上取白噪聲測度μ_1及μ_2，具有變異數$\frac{1}{2}$。它們具有(第 3.4 節)

$$\int_{E^*} \exp[i\langle x, \xi \rangle]\, d\mu_j(x) = \exp\left[-\frac{1}{4}\|\xi\|^2\right], \qquad j = 1, 2.$$

在E_c^*引入乘積測度：

$$\nu = \mu_1 \times \mu_2. \tag{6.14}$$

這當然是一個機率測度。由E_c^*的柱子集所產生的最小σ環記爲$\mathfrak{B}$，結合上此$\mathfrak{B}$，(6.14)式的ν，以及E_c^*，我們就得到一個測度空間(E_c^*, $\mathfrak{B}$, ν)。

【定義 6.4】

上述的測度空間(E_c^*, $\mathfrak{B}$, ν)稱爲一個複的白噪聲(complex white noise)。

[註解] 如果我們有必要要分辨此白噪聲與第 5.1 節所定義的白噪聲，

我們就稱後者為一個實的白噪聲。

當 $\zeta \in E_c$ 固定時，$\langle z, \zeta \rangle$ 視為 z 的函數時，為一個 $\mathfrak{B}$ 可測函數，因而為定義在 $(E_c^*, \mathfrak{B}, \nu)$ 上的一個隨機變數。

【命題 6.7】

$\mathscr{H}^0 = \{\langle z, \zeta \rangle : \zeta \in E_c\}$ 為機率空間 $(E_c^*, \mathfrak{B}, \nu)$ 上的複 Causs 系統，並且

$$E\{\langle z, \zeta\rangle\} = \int_{E_c^*} \langle z, \zeta\rangle \, d\nu(z) = 0,$$
$$E\{|\langle z, \zeta\rangle|^2\} = \|\zeta\|^2. \tag{6.15}$$

〔此地 $\|\cdot\|$ 表示複 Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$ 的範數〕。

〔證明〕 首先我們注意到，因為 ν 為乘積測度，故 $\{\langle x, \zeta \rangle : \zeta \in E\}$ 與 $\{\langle y, \eta \rangle : \eta \in E\}$ 是獨立的。令 z，ζ 如 (6.12) 式，再令 $X(z) = \langle x, \zeta \rangle + \langle y, \eta \rangle$，$Y(z) = -\langle x, \eta \rangle + \langle y, \zeta \rangle$，故 $\langle x, \zeta \rangle = X(z) + iY(z)$。在這個記號之下，加上 μ_1 與 μ_2 皆為白噪聲測度，以 $\frac{1}{2}$ 為變異數，這個事實，我們發現 $X(z)$ 為兩個獨立 Gauss 隨機變數之和，因此它本身具有 Gauss 分佈，以 0 為平均值，$\frac{1}{2}(\|\zeta\|^2 + \|\eta\|^2)$ 為變異數。同理，對於 $Y(z)$ 亦然。注意到，$X(z)$ 與 $Y(z)$ 的協方差為 0，由此可得知它們是獨立的，從而我們已證明了 $\langle x, \zeta \rangle$ 為一個複 Gauss 隨機變數滿足 (6.15) 式。由於 $\mathscr{H}^0$ 的任意有限多個元素之線性組合仍為 $\mathscr{H}^0$ 之元素，故 $\mathscr{H}^0$ 亦為複 Gauss 系統。 #

由上述命題以及 $\langle z, \zeta_1 + \zeta_2 \rangle$ 與 $\langle z, \zeta_1 + i\zeta_2 \rangle$ 之變異數的計算，我們得到：

〔推論〕 $\mathscr{H}^0$ 的協方差矩陣給如下：

$$E\{\langle z, \zeta_1\rangle \overline{\langle z, \zeta_2\rangle}\} = \overline{(\zeta_1, \zeta_2)}, \tag{6.16}$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 表示 $L^2(\mathbb{R})$ 的內積。

給一個複的白噪聲 $(E_c^*, \mathfrak{B}, \nu)$，我們可以建構複Hilbert 空間 $L^2(E_c^*, \mathfrak{B}, \nu)$。由於這個空間經常出現，故我們要簡記爲 (L_c^2)。上述 $\mathscr{H}^0$ 空間爲 (L_c^2) 的一個線性子空間，並且它在 (L_c^2) 中的閉包將記爲 $\mathscr{H}_{(1,0)}$。於是由 (6.16) 式所建立的，有關 E 與 $\mathscr{H}^0$ 之保距映射，可以仿第 4.3 節的辦法，延拓成 $L^2(\mathbf{R})$ 與 $\mathscr{H}_{(1,0)}$ 之間的一個保距映射。從而我們把記號 $\langle z, \zeta\rangle$，$\zeta \in E_c$ 作這樣的延拓：$\mathscr{H}_{(1,0)}$ 中的元素若在保距映射下對應到 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 時，則記爲 $\langle z, f\rangle$。仿第 1.6 節命題 1.11 之推論 2，我們可以看出 $\mathscr{H}_{(1,0)}$ 爲一個複 Gauss 系統。

【命題 6.8】

在空間 $\mathscr{H}_{(1,0)}$ 裡，我們有

$$(\langle z, f_1\rangle, \langle z, f_2\rangle)_{\mathscr{H}_{(1,0)}} = \overline{(f_1, f_2)}_{L^2(\mathbf{R})}, \tag{6.17}$$

因此 $\mathscr{H}_{(1,0)}$ 中的兩元素 $\langle z, f_1\rangle$ 與 $\langle z, f_2\rangle$ 是獨立的若且唯若 f_1 與 f_2 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中是互相直交的。

［證明］ 由 $\mathscr{H}_{(1,0)}$ 的定義可知 (6.17) 式是顯然的，剩下的部分由命題 6.3 直接就可以證得。 #

令 $\bar{\mathscr{H}}^0 = \{\overline{\langle z, \zeta\rangle}, \zeta \in E_c\}$ 也是一個複 Gauss 系統，於是由 $\bar{\mathscr{H}}^0$ 所產生的 (L_c^2) 之閉子空間 $\mathscr{H}_{(0,1)}$ 亦爲複的 Gauss 系統。映射

$$\bar{f} \to \overline{\langle z, f\rangle} \in \mathscr{H}_{(0,1)}, \qquad \bar{f} \in L^2(\mathbf{R}),$$

爲嵌射且保距，但是這個保距映射跟上面 $\mathscr{H}_{(1,0)}$ 的情形之保距映射有點兒不同。我們用下面的記號來區分兩者：

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_{(1,0)} &\cong L^2(\mathbf{R}) \\ \mathscr{H}_{(0,1)} &\cong \overline{L^2(\mathbf{R})}. \end{aligned} \tag{6.18}$$

令 $\langle z, f_1\rangle$ 與 $\langle z, f_2\rangle$ 爲 $\mathscr{H}_{(1,0)}$ 的兩元素，則利用下面的分解式

$$f_2 = \bar{\lambda} f_1 + f_3 \quad \text{其中} \quad (f_1, f_3) = 0 \quad \text{且} \quad \lambda = \frac{(f_1, f_2)}{\|f_1\|^2}$$

我們就得到

$$\langle z, f_2\rangle = \lambda\langle z, f_1\rangle + \langle z, f_3\rangle$$

其中$\langle z, f_1\rangle$與$\langle z, f_3\rangle$是互相獨立的。因此我們看出

$$\int_{E_c^*}\langle z, f_1\rangle\langle z, f_2\rangle\, d\nu(z) = \lambda\int_{E_c^*}\langle z, f_1\rangle^2\, d\nu(z) + \int_{E_c^*}\langle z, f_1\rangle\, d\nu(z)\int_{E_c^*}\langle z, f_3\rangle\, d\nu(z)$$
$$= 0.$$

左邊項是$\langle z, f_1\rangle$與$\overline{\langle z, f_2\rangle}$在$(L_c^2)$中的內積，故我們已證明了

$$\mathscr{H}_{(1,0)} \perp \mathscr{H}_{(0,1)} \quad (\perp \text{ 表示“直交”}). \tag{6.19}$$

【定義6.5】

直和

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_{(1,0)} \oplus \mathscr{H}_{(0,1)}$$

的每一個元素都叫做一個複的Wiener 積分。

在(6.18)式的記號下，我們可以說$\mathscr{H}_1$同構於直和$L^2(\mathbf{R}) \oplus \overline{L^2(\mathbf{R})}$。因此$\mathscr{H}_1$的元素就可以具體地用周知空間$L^2(\mathbf{R})$的元素來加以表現。

6.3 複的多重Wiener積分

前節所討論的空間$\mathscr{H}_{(1,0)}$ 或$\mathscr{H}_{(0,1)}$可以看作是z或$\bar{z}$的線性泛函。本節我們要來考慮z或$\bar{z}$的更高階的泛函，並且進一步討論一般非線性泛函，然後利用熟知的分析學概念來表現它們。我們的表現方法只不過是第4.3節所展示方法的推廣。

如以前所述，我們取多項式與指數函數爲基本的泛函。

[1] 多項式

如果一個泛函$\varphi(z)$可以表成下形

$$\varphi(z) = P(\langle z, \zeta_1\rangle, \ldots, \langle z, \zeta_p\rangle, \overline{\langle z, \zeta_1\rangle}, \ldots, \overline{\langle z, \zeta_p\rangle}), \quad \zeta_1, \ldots, \zeta_p \in E_c, \tag{6.20}$$

其中多項式$P(s_1, \cdots\cdots, s_p, t_1, \cdots\cdots, t_p)$爲$2p$個變數且具有複係數，則稱$\varphi$爲空間$E_c^*$上的多項式。如果上述中的$\zeta_1, \cdots\cdots, \zeta_p$取爲線性獨立，並且$P$對$s_1, \cdots\cdots, s_p$爲$m$次，對$t_1, \cdots\cdots, t_p$爲$n$次，則稱$\varphi$爲$(m, n)$次。所有多項式構成了一個代數，係數體爲$\mathbf{C}$，並且記此代數爲$\mathbf{P}$。顯然，任何多項式都屬於$(L_c^2)$。

〔2〕　指數函數

形如下式之泛函：

$$\varphi(z) = \exp[i\langle z, \zeta_1\rangle + i\overline{\langle z, \zeta_2\rangle}], \qquad \zeta_1, \zeta_2 \in E_c, \tag{6.21}$$

稱爲空間E_c^*上的一個指數函數。

由指數函數所產生的複數體上之代數記爲$\mathbf{A}'$，而由

$$K(z;\zeta) \equiv \exp[i\langle z, \zeta\rangle + i\overline{\langle z, \zeta\rangle}] = \exp[2i\,\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle], \quad \zeta \in E_c, \tag{6.22}$$

所產生的子代數記爲$\mathbf{A}$。$\mathbf{A}'$與$\mathbf{A}$兩者都是(L_c^2)的子集。

【命題6.9】

代數$\mathbf{A}$稠密於(L_c^2)。

［證明］　空間E_c^*可以等同爲E^*與iE^*的乘積空間，並且由定義知，測度ν爲一個直積測度〔參見(6.14)式〕。設$(L^2)_x$與$(L^2)_y$分別爲E^*上與iE^*相對於μ_1與μ_2所做出的L^2空間。因此(L_c^2)可以視爲一個張量積：

$$(L_c^2) = (L^2)_x \otimes (L^2)_y.$$

今由E^*上的指數$\{\exp[i\langle x, \zeta\rangle] : \zeta \in E\}$所產生的代數$\mathbf{A}_x$稠密於$(L^2)_x$之中（第4.2節定理4.1）。同理我們定義$\mathbf{A}_y$，我們發現$\mathbf{A}_x \otimes \mathbf{A}_y$稠密於$(L^2)_x \otimes (L^2)_y$。

另一方面，我們有下式

$$K(z;\zeta) = \exp[2i\langle x, \xi\rangle] \cdot \exp[2i\langle y, \eta\rangle]$$

其中 $z=x+iy$ ，$\zeta=\xi+i\eta$ ，故可以證得 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_x\otimes\mathbf{A}_y$ 。因而 $\mathbf{A}$ 稠密於 $(L^2)_x\otimes(L^2)_y$ ，從而稠密於 (L^2_c) 。 #

作爲上述討論的一個結論，我們有

$$\overline{\mathbf{A}}=\overline{\mathbf{A}'}=(L^2_c)\ (\text{其中}\ ^{-}\ \text{表示取閉包}) \tag{6.23}$$

［推論］ 如果 $\varphi(z)\in(L^2_c)$ 滿足

$$\int_{E_c} K(z;\zeta)\overline{\varphi(z)}\,d\nu(z)=0 \tag{6.24}$$

對任意 $\zeta\in E_c$ 皆成立，則我們有 $\varphi(z)=0$ 殆遍 (ν) 。

［證明］ 任何有限乘積 $\Pi_j K(z;\zeta_j)$ 仍然可表爲 $K(z;\zeta)$ 之形，其中 $\zeta=\Sigma_j\zeta_j$ ，故 (6.24) 式意指在 (L^2_c) 中 $\varphi(z)$ 直交於 $\mathbf{A}$ 。因爲 $\mathbf{A}$ 稠密於 (L^2_c) ，故 φ 只好爲 (L^2_c) 之零元。 #

現在我們來證明，由多項式所產生的代數 $\mathbf{P}$ 亦稠密於 (L^2_c) 。利用 (6.5) 式來求算隨機變數 $\langle z,\zeta\rangle$ 的各級矩，我們可推知指數函數的冪級數展開

$$K(z;\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}(\langle z,\zeta\rangle+\overline{\langle z,\zeta\rangle})^n$$

在 (L^2_c) 中收斂。這意思是說，$K(z;\zeta)$ 可以用多項式來逼近，同樣對 $K(z;\zeta)$ 的有限乘積也適用。綜合這個結果與 (6.23) 式，就證明了

$$\overline{\mathbf{P}}=(L^2_c). \tag{6.25}$$

令 $\{\omega_n : n\geq 1\}$ 爲 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一個完備么正系統，其中 $\omega_n\in E_c$ ，$n\geq 1$ 。由 ζ 的展開式 $\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\omega_n$ 可知在 (L^2_c) 中有

$$\langle z,\zeta\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{a}_n\langle z,\omega_n\rangle. \tag{6.26}$$

由$<z, \omega_n>$與$<\overline{z, \omega_n}>$的諸冪次所產生的代數，以C為係數體，我們記為$\mathbf{P}(\{\omega_n\})$。

【命題6.10】

代數$\mathbf{P}(\{\omega_n\})$稠密於(L_c^2)。

［證明］ 由(6.26)式之展式可以得到$<z, \zeta>$與$<\overline{z, \zeta}>$之冪級數展開。利用這些展式可以證明，$\mathbf{P}$的任意元素可以用形如乘積

$$\prod_j \langle z, \omega_j\rangle^{p_j}\overline{\langle z, \omega_j\rangle}^{q_j} \tag{6.27}$$

之線性組合來逼近。由(6.27)式之單項式所產生的向量空間恰好是$\mathbf{P}(\{\omega_n\})$。因此$\mathbf{P}$的任意元素都可以用$\mathbf{P}(\{\omega_n\})$中的多項式來逼近。再由(6.25)式就得證了。 #

現在讓我們復習一下第6.1節所引入的複Hermite多項式。

【定理6.2】

在$\mathbf{P}(\{\omega_n\})$中所有形如

$$\prod_k (p_k!\,q_k!)^{-1/2} H_{p_k, q_k}(\langle z, \omega_{j_k}\rangle, \overline{\langle z, \omega_{j_k}\rangle}) \tag{6.28}$$

之泛函，構成(L_c^2)的一組完備么正系統，其中的乘積是有限乘積並且j_k皆相異。

［證明］ (a) 形如(6.28)式之泛函顯然屬於$\mathbf{P}(\{\omega_n\})$。今由複Hermite多項式的性質可知，任何單項式$z^p\bar{z}^q$都可以表成次數至多為(p, q)的複Hermite多項式之線性組合，故我們反過來可以看出$\mathbf{P}(\{\omega_n\})$恰好就是所有形如(6.28)式的泛函之線性組合。因此由命題6.10就得證了完備性。

(b) 因為$\{\omega_n : n \geq 1\}$為$L^2(\mathbf{R})$中的一組完備么正系統，故由命題6.8知，$\{<z, \omega_n> : n \geq 1\}$是由獨立同佈（平均值0，單位變異數）

隨機變數所組成的一個複Gauss系統。將命題6.6裡的Z代換爲$\langle z, \omega_j \rangle$，我們看出，對於每個$j \geq 1$，

$$(p!q!)^{-1/2} H_{p,q}(\langle z, \omega_j \rangle, \overline{\langle z, \omega_j \rangle}), \qquad p, q \geq 0,$$

構成(L_c^2)的一組么正序列。進一步我們注意到，對於相異的ω_j，$\langle z, \omega_j \rangle$是獨立的。現在我們來計算積分

$$\int_{E_c^*} \prod_k H_{p_k, q_k}(\langle z, \omega_{j_k} \rangle, \overline{\langle z, \omega_{j_k} \rangle}) \cdot \overline{\prod_l H_{p_l, q_l}(\langle z, \omega_{j_l} \rangle, \overline{\langle z, \omega_{j_l} \rangle})}\, d\nu(z)$$

其中在不同的乘積裡，$\{\omega_{j_k}\}$與$\{\omega_{j_l}\}$是不同的。p_k，q_k，p_l，q_l都允許取值0，故上述積分可以寫成有限乘積

$$\prod_j \int_{E_c^*} H_{p_j, q_j}(\langle z, \omega_j \rangle, \overline{\langle z, \omega_j \rangle}) \overline{H_{p_j', q_j'}(\langle z, \omega_j \rangle, \overline{\langle z, \omega_j \rangle})}\, d\nu(z)$$

其中ω_j出現的次數跟前一個積分中出現的次數相同。於積分值就成爲

$$\prod_j \delta_{p_j, p_j'} \delta_{q_j, q_j'} p_j! q_j!.$$

因此系統(6.28)式之么正性就證明了。

［註解］ 上述(b)的另一個證明如下：首先證明

$$\int_{E_c^*} \exp[i\langle z, \zeta_1 \rangle + i\overline{\langle z, \zeta_2 \rangle}]\, d\nu(z) = \exp[-(\zeta_2, \zeta_1)] \tag{6.29}$$

對任意ζ_1，$\zeta_2 \in E_c$成立。其次，取(6.9)式的$\{H_{p,q}(\langle z, \omega_j \rangle, \overline{\langle z, \omega_j \rangle}) : p, q \geq 0\}$之母函數，作其方均(mean square)。然後比較係數就得到所欲的結果。當然這個證明基本上跟上述的證明相同。

下面的定義也是第4.2節相應定義的推廣。

【定義6.6】

E_c^*上可表成形如(6.28)式(可差個常數)之多項式稱爲建基於

$\{\omega_n : n \geq 1\}$ 之複 Fourier - Hermite 多項式。

暫時取定 $\{\omega_n : n \geq 1\}$。令 $\mathscr{H}_{(m,n)}$ 爲 (L_c^2) 的子空間，由建基於 $\{\omega_n\}$ 且次數爲 (m, n) 之 Fourier - Hermite 多項式所張成。特別地，$\mathscr{H}_{(0,0)} = \mathbf{C}$，而 $\mathscr{H}_{(1,0)}$ 與 $\mathscr{H}_{(0,1)}$ 跟前節所定義者相同。由定義容易看出，$\mathscr{H}_{(m,n)}$，$m, n \geq 0$，爲 (L_c^2) 中互相直交的子空間。

【命題 6.11】

(L_c^2) 中的子空間 $\mathscr{H}_{(m,n)}$ 跟 $L^2(\mathbf{R})$ 中完備么正系統 $\{\omega_n : n \geq 1\}$ 的取法無關。

［證明］ 設 $\{\omega_n' : n \geq 1\}$ 爲 $L^2(\mathbf{R})$ 中相異於 $\{\omega_n : n \geq 1\}$ 的一組完備么正系統。爲了探求建基於 $\{\omega_n\}$ 與 $\{\omega_n'\}$ 的複 Fourier - Hermite 多項式之間的關係，我們給出下面的公式

$$
\begin{aligned}
\int_{E_c} H_{p,q}(\langle z, \omega_m\rangle, \overline{\langle z, \omega_m\rangle})\overline{H_{p',q'}(\langle z, \omega_n'\rangle, \overline{\langle z, \omega_n'\rangle})}\, d\nu(z) \\
= \delta_{p,p'}\delta_{q,q'}\, p!\, q!\, (\omega_n', \omega_m)^p \overline{(\omega_n', \omega_m)}^q.
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

這個公式的證明可以仿照定理 6.2 證明之後的［註解］來做。它告訴我們，建基於 $\{\omega_n'\}$ 且次數爲 (m, n) 的所有複 Fourier - Hermite 多項式直交於 $\mathscr{H}_{(m',n')}$，當 $(m', n') \neq (m, n)$ 時。但是，建基於 $\{\omega_n'\}$ 的所有多項式張成整個空間 (L_c^2)。因此，利用 $\{\omega_n'\}$ 所建構出的子空間 $\mathscr{H}'_{(m,n)}$ 與利用 $\{\omega_n\}$ 所建構出的 $\mathscr{H}_{(m,n)}$ 是相同的。 #

【定義 6.7】

$\mathscr{H}_{(m,n)}$ 的元素稱爲次數是 (m, n) 的複多重 Wiener 積分，而直和

$$\mathscr{H}_n = \sum_{k=0}^{n} \oplus\, \mathscr{H}_{(n-k,k)}$$

的元素叫做次數爲 n 之複多重 Wiener 積分。

關於 (L_c^2) 之分解，我們有下面類似於第 4.2 節定理 4.3 的結果。

【定理6.3】

空間 (L_c^2) 有下面的直和分解：

$$(L_c^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\left(\sum_{k=0}^{n}\oplus\mathscr{H}_{(n-k,k)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\mathscr{H}_n. \tag{6.31}$$

現在我們要問：$\mathscr{H}_{(m,n)}$ 中的元素是否可以利用我們熟悉的東西來作具體的表現？答案幾乎跟第 4.3 節相同。由於這個理由，我們只描述出結果，遇到相異的情況我們就作一些註解。

本節開頭所定義的指數函數 $K(z;\zeta)$ 將繼續扮演主要角色，因爲由命題 6.9 知，$\{K(z;\zeta):\zeta\in E_c\}$ 產生了 (L_c^2) 上足夠豐富的一類泛函。因此，在 (L_c^2) 上考慮下面的變換 $\mathscr{T}$ 是很合理的：

$$\varphi\to(\mathscr{T}\varphi)(\zeta)=\int_{E_c^*}K(z;\zeta)\overline{\varphi(z)}\,d\nu(z),\qquad \zeta\in E_c,\ \varphi\in(L_c^2), \tag{6.32}$$

看作是第 4.3 節所引進的變換 $\mathscr{T}$ 之推廣。爲了方便起見，我們仍用相同的記號 $\mathscr{T}$。

變換 $\mathscr{T}$ 是從 (L_c^2) 到 E_c 上泛函所成某空間之線性映射。特別是，若 $\varphi(z)\equiv1$，記其爲 $1(z)$，則

$$(\mathscr{T}1)(\zeta)=\exp(-\|\zeta\|^2),$$

這是 (6.29) 式的特殊情形，取 $\zeta_1=\zeta_2$ 就得到。上式右項之泛函以後將常用，故我們特別記之爲 $C(\zeta)$（參見第 3.1 節的記號）。

當 φ 取爲一個複 Fourier - Hermite 多項式時，就會得到一個明確表式；若 $\varphi(z)=H_{p,q}(\langle z,\omega\rangle,\langle\overline{z,\omega}\rangle)$，$\|\omega\|=1$，則

$$(\mathscr{T}\varphi)(\zeta)=i^{p+q}(\omega,\zeta)^p(\zeta,\omega)^qC(\zeta). \tag{6.33}$$

對於一個由 (6.28) 式所給定的複 Fourier - Hermite 多項式 $\varphi(z)$，利用 (6.33) 式及 $\langle z,\omega_n\rangle$，$n\geq1$，是獨立的事實，我們得到

$$(\mathscr{T}\varphi)(\zeta)=i^{(\Sigma p_k+\Sigma q_k)}\prod_k(p_k!q_k!)^{-1/2}(\omega_{j_k},\zeta)^{p_k}(\zeta,\omega_{j_k})^{q_k}C(\zeta). \tag{6.34}$$

利用這個結果我們可以仿第 4.3 節定理 4.5 之論證來證明下面的結果：

【定理 6.4】

對於任意 $\varphi(z)\in H_{(m,n)}$，存在唯一的函數 $F_\varphi\in\hat{L}^2(\mathbf{R}^m)\otimes\overline{\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)}$ 使得

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{T}\varphi)(\zeta)=i^{m+n}C(\zeta)\int_{\mathbf{R}^{m+n}}&F_\varphi(u_1,\ldots,u_m;v_1,\ldots,v_n)\\
&\times\overline{\zeta(u_1)}\cdots\overline{\zeta(u_m)}\zeta(v_1)\cdots\zeta(v_n)\,du_1\cdots du_m\,dv_1\cdots dv_n,
\end{aligned}
\tag{6.35}
$$

並且我們也有

$$
\|\varphi\|_{(L_c^2)}=\sqrt{m!\,n!}\,\|F_\varphi\|_{L_c^2(\mathbf{R}^{m+n})}
\tag{6.36}
$$

這個定理的證明幾乎跟第 4.3 節之定理 4.5 相同，不過我們還需再用下面的補題。

【補題 6.1】

如果 $F\in\hat{L}^2(\mathbf{R}^m)\otimes\overline{\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)}$ 滿足

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^{m+n}}&F_\varphi(u_1,\ldots,u_m;v_1,\ldots,v_n)\\
&\times\overline{\zeta(u_1)}\cdots\overline{\zeta(u_m)}\,\zeta(v_1)\cdots\zeta(v_n)\,du_1\cdots du_m\,dv_1\cdots dv_n=0
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

對任何 $\zeta\in E_c$ 皆成立，則我們有 $F=0$，殆遍。

［證明］ 我們只給出證明的綱要。當 m 或 n 為 0 時，證明跟第 4.3 節相同，但是對於一般情形就變得很複雜。因此我們只給出 $m=n=1$ 的情形之證明。

設 $\{\omega_n : n\geq 1\}$ 為 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一組完備么正系統，則 $\{\omega_m\otimes\overline{\omega}_n : m, n\geq 1\}$ 構成 $L^2(\mathbf{R})\otimes\overline{L^2(\mathbf{R})}$ $(\cong L^2(\mathbf{R}^2))$ 中的一組完備么正系統。利用此系統我們將 $F\in L^2(\mathbf{R})\otimes\overline{L^2(\mathbf{R})}$ 表為

$$
F=\sum_{m,n}a_{m,n}\omega_m\otimes\bar{\omega}_n.
$$

今若F滿足(6.37)式，分別取ζ爲ω_j，$\omega_j+\omega_k$，$\omega_j+i\omega_k$，$j\neq k$，則得到$a_{j,j}=0$且$a_{j,k}=0$，$j\neq k$。於是結論就得到了。 #

回到(L_c^2)泛函的表現問題，我們利用定理6.3就可以建立下面的結論：

[推論] 變換$\mathscr{T}$誘導出一個同構

$$(L_c^2)\cong\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\sum_{k=0}^{n}\oplus\{(n-k)!\,k!\}^{1/2}\hat{L}^2(\mathbf{R}^{n-k})\otimes\overline{\hat{L}^2(\mathbf{R}^k)}. \tag{6.38}$$

[註解1] 常數$\{(n-k)!\,k!\}^{1/2}$是用來調整範數的，使得(6.38)式之同構同時變成一個保距映射。

[註解2] 用物理的術語來說，(6.38)式之展開式給出量子力學中一個帶電的純量場之Fock空間。空間$\hat{L}^2(\mathbf{R}^{n-k})\otimes\hat{L}^2(\mathbf{R}^k)$所對應的狀態是$n-k$個質點帶正電，並且其餘$k$個質點帶負電。

任意$\varphi\in(L_c^2)$都可以表成下形

$$\varphi=\sum_{m,n}\varphi_{m,n}$$

其中$\varphi_{m,n}$爲φ至子空間$\mathscr{H}_{(m,n)}$的投影，於是每個$\varphi_{m,n}$都可以透過(6.35)式用$F_{\varphi_{m,n}}$來表現。

【定義6.8】

利用$F_{\varphi_{m,n}}$，m，$n\geq 0$，對$\varphi\in(L_c^2)$所作的級數表現(6.35)式，稱爲**積分表現**(integral representation)。所出現的函數$F_{\varphi_{m,n}}$稱爲**積分核**(integral kernel)或簡稱爲核，其次數爲(m,n)。

上述的推論是說，任意$\varphi\in(L_c^2)$都可以用一族積分核$\{F_{\varphi_{m,n}}:m,n\geq 0\}$來加以實現，其中範數也適當考慮進去。

6.4 (L_c^2)中的特殊泛函

本節我們要將上一節的結果應用到E_c^*上的實值泛函以及E_c^*上的解析

泛函理論，這些都是無窮維變數 z 之泛函。

[1] 實值泛函

在 (L^2_c) 中的一個實值泛函，其積分表現具有特殊形式，因此在這種情形之下，我們可以推出一些更精細的結果。

利用複 Hermite 多項式的公式 $\overline{H_{p,q}(z,\bar{z})}=H_{q,p}(z,\bar{z})$ 立即就可以得到

$$\overline{\mathscr{H}_{(m,n)}}\equiv\{\overline{\varphi(z)}:\varphi\in\mathscr{H}_{(m,n)}\}=\mathscr{H}_{(n,m)},\qquad m,n\geq 0,$$

但是對於每個特殊的 $\varphi\in\mathscr{H}_{(m,n)}$，我們可以敍述出更明確的結果。

【補題 6.2】

設 F_φ 爲 $\varphi(z)\in\mathscr{H}_{(m,n)}$ 之積分表現核，則對應於 $\overline{\varphi(z)}\in\mathscr{H}_{(n,m)}$ 之核 $F_{\bar\varphi}$ 爲

$$F_{\bar\varphi}(v_1,\ldots,v_n;u_1,\ldots,u_m)=(-1)^{m+n}\overline{F_\varphi(u_1,\ldots,u_m,v_1\ldots,v_n)}.\tag{6.39}$$

[證明] 利用關係式 $\overline{K(z;\zeta)}=K(z;-\zeta)$ 得到

$$(\mathscr{F}\bar\varphi)(\zeta)=\int_{E_c^*}K(z;\zeta)\overline{\varphi(z)}\,d\nu(z)=\overline{\int_{E_c^*}K(z;-\zeta)\varphi(z)\,d\nu(z)},\qquad \zeta\in E_c.$$

再由此式與 (6.35) 式之表式，很容易就可以證明 (6.39) 式。 #

利用這個補題我們就可以證明下面的命題。

【命題 6.12】

如果 $\varphi(z)\in\mathscr{H}_{(m,n)}$ 是實值的，則 $m=n$ 並且積分表現核 $F_\varphi(u,v)\in\hat{L}^2(\mathbb{R}^m)\otimes\hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$，$u=(u_1,\cdots\cdots,u_m)$，$v=(v_1,\cdots\cdots,v_n)$，是 Hermite 型的：

$$F_\varphi(v,u)=\overline{F_\varphi(u,v)}.\tag{6.40}$$

因爲 $\varphi\in\mathscr{H}_{(n,n)}$ 的積分核 $F_\varphi(u,v)$ 通常爲一個 L^2 核，故它定義了

一個 Hilbert - Schmidt 型的積分算子。如果 $\varphi(z)$ 進一步是實值的，則上述結果告訴我們，這個核定義了一個 Hermite 算子。因此 $F_\varphi(u, v)$ 可以作固有函數展開

$$F_\varphi(u, v) = \sum_k \lambda_k^{-1}\psi_k(u)\overline{\psi_k(v)} \tag{6.41}$$

其中 λ_k 爲固有值，$\{\psi_k\}$ 爲么正化的固有函數〔參見 F. Smithies (1958)〕。如所周知，每個固有值 λ_k 是實值的，並且也有

$$\lambda_k \int_{\mathbf{R}^n} F(u, v)\psi_k(v)\, dv = \psi_k(u),$$

以及

$$\sum_k \lambda_k^{-2} = \int_{\mathbf{R}^{2n}} |F_\varphi(u, v)|^2\, du\, dv < \infty.$$

進一步，由上面第一式我們發現，每個 $\psi_k(u)$ 屬於 $\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$，雖然我們已知 $\{\psi_k\}$ 爲 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中的一組么正系統。

也許讀者會問：在 (L_c^2) 中，什麼是展式 (6.41) 式之配對？爲了回答這個問題，讓我們來找 $\mathscr{H}_{(n,n)}$ 中的一個元素，具有積分核 $\psi_k(u)\overline{\psi_k(v)}$ 者。在 $L^2(\mathbf{R})$，取一組完備么正系統 $\{\omega_n\}$，我們可以作其張量積，並且做出 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一組完備么正系統，每一個元素可以表成下形：

$$\bigotimes_j \omega_j^{p_j\otimes}, \qquad \sum p_j = n. \tag{6.42}$$

利用對稱化操作（參見第 4.3 節），我們就得到 $\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 的一個基底。然而，空間 $\mathscr{H}_{(n,n)}$ 是由

$$\prod_j H_{p_j, q_j}(\langle z, \omega_j\rangle, \overline{\langle z, \omega_j\rangle}), \qquad \sum p_j = \sum q_j = n. \tag{6.43}$$

所張成的。相應的積分核是

$$\bigotimes_j \omega_j^{p_j\otimes} \quad 與 \quad \bigotimes_j \bar{\omega}_j^{q_j\otimes}.$$

的對稱化之張量積。今給如 (6.43) 式之泛函是由次數爲 (n, n) 之單項式

$$\prod_j \langle z, \omega_j\rangle^{p_j}\overline{\langle z, \omega_j\rangle}^{q_j}, \qquad \sum p_j = \sum q_j = n,$$

減去它在較低次空間$\mathscr{H}_{(m',n')}$，m'，$n' \leq n$，$m' + n' < 2n$的投影所得到的。我們注意到，這種對較低次空間的直交化，顯然定義了一個線性算子。

這些觀察顯示，下面的步驟必得所欲的答案。首先利用（6.42）式之完備么正系統將 $\psi_k \in \hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 展成 Fourier 級數。讓每一項對應到

$$\prod_j (p_j!)^{-1/2}\langle z, \omega_j\rangle^{p_j}, \qquad \sum p_j = n,$$

由此我們發現，$\widetilde{\varphi}_k(z) \in \mathscr{H}_{(n,0)}$ 對應到 ψ_k。顯然，$\widetilde{\varphi}_k$ 的積分核等於 ψ_k。然後再取 $|\widetilde{\varphi}_k(z)|^2$ 對低次空間的直交化 $\varphi_k(z)$。如此這般所得到泛函 $\varphi_k(z)$ 屬於$\mathscr{H}_{(n,n)}$，並且其積分核必為 $\psi_k(u)\overline{\psi_k(v)}$。因此我所要找的，相應於（6.41）式的有關 $\varphi(z)$ 之展式為

$$\varphi(z) = \sum_k \lambda_k^{-1}\varphi_k(z). \tag{6.44}$$

按上述步驟來做，每個 $\varphi_k(z)$ 的實際表示都非常複雜。此地我們只對 $n = 1$ 的情形，給出泛函的特殊而又簡單例子。

[例 2]

設 $\varphi(z)$ 為$\mathscr{H}_{(1,1)}$ 中的一個實值泛函。由（6.41）式知，相應的積分核可以表成下形：

$$F_\varphi(u, v) = \sum_k \lambda_k^{-1}\psi_k(u)\overline{\psi_k(v)} \qquad u, v \in \mathbf{R}$$

因為固有函數 $\{\psi_k\}$ 本身為 $L^2(\mathbf{R})$ 中的么正系統，我們可以在 $H_{(1,0)}$ 中取 $\langle z, \psi_k\rangle$ 為 $\widetilde{\varphi}_k(z)$。將 $|\langle z, \psi_k\rangle|^2$ 減去它在$\mathscr{H}_{(0,0)}$上的投影 $\|\psi_k\|^2 = 1$ 所得的泛函為$\mathscr{H}_{1,1}(\langle z, \psi_k\rangle, \overline{\langle z, \psi_k\rangle})$，並且它自動直交於$\mathscr{H}_{(1,0)}$與$\mathscr{H}_{(0,1)}$。因此，$|\langle z, \psi_k\rangle|^2$ 的直交化已辦到，並且在此情形下（6.44）式之實際展開為

$$\varphi(z) = \sum_k \lambda_k^{-1}(|\langle z, \psi_k\rangle|^2 - 1). \tag{6.45}$$

關於這個例子，我們還需作一特別註解。因爲$\{\psi_k\}$爲一個么正系統，$\langle z, \psi_k \rangle$構成一組獨立複Gauss 隨機變數，故$\{|\langle z, \psi_k\rangle|^2 - 1\}$亦爲一組獨立隨機變數。因此剛才所得到的展式(6.45)式，不只是將$\varphi(z)$表成直交隨機變數之和，而且表成獨立隨機變數之和。由此特殊事實，我們就可以得到實值二次泛函的機率分佈，及其它結果、種種應用。對於更高次的實值泛函，我們也可以求得其直交展式，作爲(6.45)式之推廣，但是我們對此不太感興趣，因爲一般而言，展式中的各項並不互相獨立。

[2] 解析泛函

我們要將E_c^*視爲無限維複向量空間，試圖來定義解析函數（無窮多變數的）。

在$L^2(\mathbf{R})$取一組完備么正系統$\{\omega_n\}$，並且考慮建基於$\{\omega_n\}$且形如

$$p(z) = \sum_{\substack{(p_1, p_2, \dots, p_k) \\ k \geq 1}} a_{p_1, p_2, \dots, p_k} \langle z, \omega_1\rangle^{p_1} \langle z, \omega_2\rangle^{p_2} \cdots \langle z, \omega_k\rangle^{p_k} \tag{6.46}$$

之多項式。上面的求和是這樣的：k在所有正整數中變動；而$(p_1, p_2 \cdots, p_k)$對所有整數之k重數來變動，但是要在除了有限多個指標之外，$a_{p_1, p_2, \quad, p_k}$等於0的限制條件下。將$p(z)$叫做解析泛函似乎是合宜的。事實上並沒有涉及$\bar{z}$，形式上即

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{z}} = 0. \tag{6.47}$$

回想一下，$z = x + iy$，$x, y \in E^*$。於是我們可以將$p(z)$表成下形

$$p(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{6.48}$$

令$\langle z, \omega_k\rangle = x_k + iy_k$，$x_k, y_k \in \mathbf{R}$，則$u$與$v$可以表成

$$u = u(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots), \qquad v = v(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots).$$

因爲$p(z)$爲一個多項式，由簡單計算就可以證明(6.47)式等價於有關u及v的Cauchy-Riemann 微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\frac{\partial v}{\partial y_k},\ \frac{\partial u}{\partial y_k}=-\frac{\partial v}{\partial x_k},\qquad k=1,2,\ldots,$$

復次，u 滿足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_l}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_k\,\partial y_l}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial y_l}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_l\,\partial y_k}=0;$$

同理，v 也滿足類似的方程式。換言之，u 與 v 在 E_c^* 上是**多調和的**（pluriharmonic)。因此我們可以稱 $p(z)$ 爲空間 E_c^* 上的**解析多項式**（holomorphic polynomial）。

現在我們利用 (6.5) 式以及 $\{<z,\omega_n>\}$爲獨立複Gauss 隨機變數的事實來計算 $p(z)$ 的 (L_c^2) 範數。事實上，(6.46)式之泛函是互相直交泛函之和，故我們有

$$\|p\|^2=\sum|a_{p_1,p_2,\ldots,p_k}|^2 p_1!\,p_2!\cdots p_k!.$$

另一方面我們有

$$\left\|\frac{\partial p}{\partial\omega_j}\right\|^2=\sum|a_{p_1,p_2,\ldots,p_k}|^2 p_j\cdot p_1!\,p_2!\cdots p_k!,$$

其中 $p_j=0$ 也包括在內，並且 $\partial/\partial\omega_j$ 爲一微分算子，其定義方法類似於第 5.7 節有關 $\partial/\partial\zeta_j$ 之定義。因此我們有：

$$\text{若 } p\in\mathscr{H}_{(n,0)},\quad \text{則}\quad \frac{\partial p}{\partial\omega_j}\in\mathscr{H}_{(n-1,0)}\quad \text{且}\quad \left\|\frac{\partial p}{\partial\omega_j}\right\|^2\le n\|p\|^2.$$

經此表現後，我們發現到，ω_j 可以取爲 E_c 中之任一單位向量 ω，並且 p 不必是建基於 $\{\omega_n\}$ 之多項式。復次，對 $\partial p/\partial\omega$的範數之計算告訴我們，$p$ 甚至不必爲一個多項式，而可以爲$\mathscr{H}_{(n,0)}$中的一般泛函。因此我們已到達定義

$$\mathscr{H}=\left\{\varphi=\sum_n\varphi_n:\varphi_n\in\mathscr{H}_n,\ \sum_n n^s\|\varphi_n\|^2<\infty,\ \forall\ n\in N,\quad\right\}$$

爲解析泛函類(the class of holomorphic functionals)的地步，這是解析多項式類的推廣。

第七章
單直羣及其應用

7.1 無窮維單直群

跟上一章一樣，仍令E爲一個稠密於$L^2(\mathbb{R})$的核式空間。我們令E_c與E_c^*分别爲E的複化及E_c的偶伴空間，再令$(E_c^*, \mathfrak{B}, \nu)$爲複的白噪聲。

令$U(E_c)$爲E_c上滿足下列條件的所有線性變換g所成的集合：

1. g爲從E_c到自身的同胚；並且
2. g保持$L^2(\mathbb{R})$的範數不變：

$$\|g\zeta\| = \|\zeta\|, \qquad \zeta \in E_c.$$

對於$U(E_c)$中的兩元g_1，g_2我們定義它們的乘積爲

$$(g_1 g_2)\zeta = g_1(g_2\zeta).$$

於是立即可以看出，在此乘法運算之下，$U(E_c)$構成一個群。對於此群也可以引入適當的位相構造，這等一下再給，現在我們先給出下面的定義：

【定義 7.1】
$U(E_c)$稱爲無窮維單直群或簡稱爲單直群。

當我們無需明確指出E_c時，我們常將$U(E_c)$記成U_∞。

對於每個$g \in U(E_c)$，我們可以利用下式：

$$\langle z, g\zeta\rangle = \langle g^* z, \zeta\rangle, \qquad z \in E_c^*, \quad \zeta \in E_c.$$

在E_c^*上唯一定出一個線性變換g^*。這個變換是E_c^*的一個自同構，所有這些變換所成的集合

$$U^*(E_c^*)=\{g^*: g\in U(E_c)\},$$

也構成一個群，其乘積滿足

$$g_1^*g_2^*=(g_2g_1)^*,\qquad g_1^*,g_2^*\in U^*(E_c).$$

今由此公式得到

$$(g^{-1})^*=(g^*)^{-1},\qquad g\in U(E_c).$$

從而蓋射

$$g\to(g^*)^{-1}\in U^*(E_c^*),\qquad g\in U(E_c)\tag{7.1}$$

定義了一個從群$U(E_c)$到$U^*(E_c^*)$的同構。因此我們可以選取這兩個群之中的任一個來討論就好了，不過以下我們主要是取群$U(E_c)$。在這樣做之前，我們先來敍述有關$U^*(E_c^*)$的一個重要命題。

【命題7.1】

對於任意$g^*\in U^*(E_c^*)$，我們有

$$g^*\circ\nu=\nu.\tag{7.2}$$

［證明］ 這個命題的證明方法跟第5.1節定理5.1所述者一樣。我們先來給出一些註解。首先，σ環$\mathfrak{B}$也是由柱集所產生者。其次，下面兩個複Gauss系統

$$\{\langle z,\zeta\rangle:\zeta\in E_c\},\quad 與\quad \{\langle z,g\zeta\rangle:\zeta\in E_c\}$$

具有相同的機率分佈。前者由定義直接可得，而後由下面的觀察可證得：此兩複Gauss系統具有零平均向量，並且分別具有協方差矩陣

$$(\zeta_1,\zeta_2)\quad 與\quad (g\zeta_1,g\zeta_2)=(\zeta_1,\zeta_2),\qquad \zeta_1,\zeta_2\in E_c,$$

亦即具有相同的協方差矩陣（參見定理6.1）。如果A爲一個柱集，則$g^*A=\{g^*z:z\in A\}$亦然。於是由上述關於協方差矩陣的觀察就得到

$$\nu(g^*A)=\nu(A).$$

此式可以推廣成對於由柱集所生成的σ環$\mathfrak{B}$之元皆成立，故證明就完成了。

#

下面的推論是此命題的直接結論。

[推論] 對於每個$g\in U(E_c)$，在(L_c^2)上由

$$U_g\varphi(z)=\varphi(g^*z),\qquad \varphi\in(L_c^2), \tag{7.3}$$

所定義的算子U_g是單直的（unitary）。

現在我們回來討論$U(E_c)$。顯然，由(7.3)所定義的算子所成的集合$A=\{U_g : g\in U(E_c)\}$構成一個群，並且由於

$$U_{g_1}U_{g_2}\varphi(z)=U_{g_1}\varphi(g_2^*z)=\varphi(g_2^*g_1^*z)=\varphi((g_1g_2)^*z),\qquad \varphi\in(L_c^2),$$

我們看出A同構於$U(E_c)$。由於A的元是(L_c^2)之線性映射，由(L_c^2)的範數就可以誘生出A的一個位相構造。利用A的這個位相構造，我們就可以對$U(E_c)$引入最弱的位相，使得所有的映射

$$g\to U_g\in\mathfrak{U},\qquad g\in U(E_c),$$

皆為強連續。換言之，我們已定出了群$U(E_c)$的一個單直表現。當然，我們也可以對$U(E_c)$引入緊開位相，因為$U(E_c)$是E_c的一個變換群也。

到現在為止，有關$U(E_c)$的討論，跟第5.1節所討論的無窮維旋轉群$O(E)$非常相像。事實上，$O(E)$與$O(E_c)$之間具有非常密切的關連，類似於有限維情形的直交群$O(E)$與單直群$U(n)$的關係。事實上，在下列意味下，$O(E)$可看作是$U(E_c)$的子群：對於任意$\tilde{g}\in O(E)$及$\zeta\in E_c$，記$\zeta=\xi+i\eta$（$\xi,\eta\in E$）並且在E_c上定義一個變換如下：

$$g\zeta=\tilde{g}\xi+i\tilde{g}\eta.$$

於是$g\in U(E_c)$，並且映射

$$\tilde{g}\to g\in U(E_c),\qquad \tilde{g}\in O(E),$$

爲一個嵌射且保持群運算。這就證明了我們的斷言。

不過，我們必須注意的是，$O(E)$ 與$U(E_c)$既非緊緻，也不局緊，故在跟$O(n)$與$U(n)$作類推時要小心。

7.2 單直群 $U(\mathscr{S}_c)$

到現在爲止，我們討論了任意核式空間E_c上的無限維單直群$U(E_c)$，其中$E_c \leq L^2(\mathbf{R}) \leq E_c^*$。以下諸節我們要取$E_c$爲（複）Schwartz 空間 $\mathscr{S}_c$，並且利用這個空間特具的性質來研究$U(\mathscr{S}_c)$更精細的性質。

我們先來解釋，爲何對$E_c = \mathscr{S}_c$有興趣？首先，(1) Fourier 變換可以扮演重要角色。如我們已看過的複白噪聲（E_c^*, $\mathfrak{B}$, ν），由於 E_c^* 的每個元素可以看作是一個複的Brown 運動之樣本函數，故Fourier變換就出現了。爲了對這些樣本函數的泛函作調性分析，我們需要利用 Fourier 變換當作基本工具。將 z 看作是一個荷佈，記 z 的Fourier 變換爲 $\mathscr{F}z$，定義

$$\langle \mathscr{F}z, \zeta\rangle = \langle z, \mathscr{F}^*\zeta\rangle, \qquad (\mathscr{F}^* = \mathscr{F}^{-1}),$$

其中我們用到了空間E_c上的反 Fourier 交換。因此$\mathscr{F}$可以定義成E_c^*上的一個算子，於是 $\mathscr{F}^*$ 必爲$U(E_c)$之元。這個要求對空間 E_c 起了局限作用。Schwartz 空間 $\mathscr{S}_c$ 當然滿足這個要求（參見附錄A.3）。

其次，爲了方便起見，(2)我們希望：定義E_c的位相之可列多個 Hilbert 範數$\|\cdot\|_n$，$n \geq 0$，可以表成下形：

$$\|\zeta\|_n = \|D^n\zeta\|, \qquad n \geq 0, \tag{7.4}$$

其中D爲某個微分算子，而（7.4）式右邊的範數$\|\cdot\|$爲$L^2(\mathbf{R})$的範數。

復次，(3)定義範數之微分算子 D必須跟Fourier 變換是可交換的，亦即

$$\mathscr{F}D = D\mathscr{F}.$$

由基本的計算容易看出，滿足上述兩個條件之微分算子可以取爲（可差個常數倍）：

$$D=\frac{d^2}{du^2}-(u^2+1). \tag{7.5}$$

這是周知的一個微分算子，它具有固有函數

$$\zeta_n(u)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2}H_n(u)\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right), \qquad n\geq 0, \tag{7.6}$$

相應固有值爲$-2(n+1)$，亦即

$$D\zeta_n=-2(n+1)\zeta_n, \qquad n\geq 0, \tag{7.7}$$

並且每個固有值都是單純的（即重度爲 1）。

今函數$\{\zeta_n: n\geq 0\}$構成了$L^2(\mathbf{R})$中的一組完備么正系統。令$a_n(\zeta)=(\zeta,\zeta_n)$表示函數$\zeta\in\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})\cap L^2(\mathbf{R})$的第$n$個 Fourier 係數。顯然我們有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(\zeta)|^2<\infty,$$

以及進一步的關係式

$$a_n(D\zeta)=-2(n+1)a_n(\zeta), \qquad n\geq 0,$$

這告訴我們，若欲使$\|\zeta\|_p<\infty$，$\forall p$，則必須要求序列$a_n(\zeta)$快速遞減，當$n\to\infty$。但這就表示$\zeta\in\mathscr{S}_c$〔參見 L.Schwartz（1950－51）第 7 章第 7 節例 7〕。

如此這般，我們發現$\mathscr{S}_c$爲一個適當的核式空間，滿足(1)、(2)及(3)的要求，故以下我們恒取$E_0=\mathscr{S}_c$。由上述的討論，我們又有下面的結論：

【命題 7.2】

當 Fourier 變換$\mathscr{F}$及其反 Fourier 變換$\mathscr{F}^{-1}$視爲$\mathscr{S}_c$上的線性算子時，它們都屬於$U(\mathscr{S}_c)$。

現在我們開始要用空間$\mathscr{S}_c$的性質來研究$U(\mathscr{S}_c)$的一些精細性質。仿

$O(E)$的情形，我們先來找一些一參數子群。下一節就來做這件工作。

7.3 $U(\mathscr{S}_c)$ 的子群

本節我們討論 $U(\mathscr{S}_c)$ 的一參數子群或有限維子群，這些描述了 Brown 運動的機率或動力方面的性質。我們要介紹的第一個子群是這樣的子群，它在局部上同構於 Heisenberg 群。

[1] Heisenberg 群

這是一個三維群，我們來探討它的三個相關的一參數子群。

(a) Gauge 變換是最簡單的一參數子群，定義為

$$I_t: \zeta(u) \to (I_t\zeta)(u) = e^{it}\zeta(u), \quad -\infty < t < \infty, \tag{7.8}$$

〔參見 S.S. Schweber（1964），第二部分〕。顯然，每個 I_t 皆為 $U(\mathscr{S}_c)$ 之元素，並且 $\{I_t : -\infty < t < \infty\}$ 構成了一參數群，對 t 是連續的且具有 2π 週期：

$$\begin{aligned} &I_tI_s = I_{t+s}, && -\infty < t, s < \infty; \\ &I_{t+2\pi} = I_t, && -\infty < t < \infty; \\ &I_t \to I \quad \text{當} \quad t \to 0. \end{aligned}$$

群 $\{I_t : -\infty < t < \infty\}$ 稱為 Gauge 變換。

今考慮作用在 (L_c^2) 上的單直算子 U_t，經由 (7.8) 式的 I_t 誘導出來，如下：

$$U_t = U_{I_t}.$$

因為 $U_t\langle z, \zeta\rangle = \langle e^{-it}z, \zeta\rangle = e^{-it}\langle z, \zeta\rangle$ 成立，故我們看出，對於由 (6.28) 式所給定的複 Fourier - Hermite 多項式 $\varphi(z) \in (L_c^2)$，我們有

$$(U_t\varphi)(z) = \prod_k (p_k!\,q_k!)^{-1/2} H_{p_k, q_k}(e^{-it}\langle z, \omega_k\rangle, e^{it}\overline{\langle z, \omega_k\rangle}) = \exp\left[-it\left\{\sum_k (p_k - q_k)\right\}\right]\varphi(z).$$

因此對於任意 $\varphi(z) \in \mathscr{K}_{(m,n)}$ ，我們有下面的等式

$$(U_t\varphi)(z) = \exp[-it(m-n)]\varphi(z).$$

換言之，一參數單值群 $\{U_t: -\infty < t < \infty\}$ 在空間$\mathscr{K}_n$ 上只有點值譜，由下面的值所組成：

$$-(n-2k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

並且 $-(n-2k)$ 所屬的固有空間是$\mathscr{K}_{(n-k,k)}$ 。因此我們可以說 $\{U_t\}$ 給出了直和分解

$$\mathscr{K}_n = \sum_{k=0}^{n} \oplus \mathscr{K}_{(n-k,k)}. \tag{7.9}$$

至於Gauge 變換對測度空間 $(\mathscr{S}_c^*, \mathfrak{B}, \nu)$ 的作用，我們由 $\{I_t\} \subset U(\mathscr{S}_c)$ 的事實可知，ν 在旋轉

$$I_t^* z = (x\cos t + y\sin t) + i(y\cos t - x\sin t), \qquad z = x + iy,$$

$x, y \in \mathscr{S}^*$ 的作用下是不變的，其中$\mathscr{S}_c^*$ 視爲 (x, y) 平面。

(b) 移位（the shift）。此地所討論的移位幾乎跟第 5.2 節所介紹的一樣，唯一的差異是，此地的移位作用在先前空間的複化空間上。定義如下的一參數群 $\{S_t: -\infty < t < \infty\}$ ：

$$S_t: \zeta(u) \to (S_t\zeta)(u) = \zeta(u-t), \qquad -\infty < t < \infty, \tag{7.10}$$

顯然是 $U(\mathscr{S}_c)$ 的一個子群。

令 $S_t^* = T_t$ ，我們看出 $\{T_t: -\infty < t < \infty\}$ 爲測度空間 $(\mathscr{S}_c^*, \mathfrak{B}, \nu)$ 上的一個流，稱爲複 Brown運動的流。它在許多領域，包括機率論，都扮

演了重要角色，由於解說起來跟第4.4節所述者相同，故此地我們不再重述。

(c)　**乘法**（multiplication）。回想一下，我們先前所強調的Fourier變換這個角色，今我們引入一參數群 $\{\pi_t: -\infty< t <\infty\}$，它透過 $\mathscr{F}$ 跟移位是共軛的：

$$\pi_t = \mathscr{F} S_t \mathscr{F}^{-1}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{7.11}$$

因爲 $\mathscr{F}\in U(\mathscr{S}_c)$，故 $\{\pi_t: -\infty< t <\infty\}$ 爲 $U(\mathscr{S}_c)$ 之子群，稱爲乘法（子群）。利用簡單計算就可以證明 π_t 的作用如下：

$$(\pi_t\zeta)(u) = e^{itu}\zeta(u), \qquad -\infty < t < \infty. \tag{7.12}$$

集合 $\{\pi_t^*: -\infty< t <\infty\}$ 也是 $(\mathscr{S}_c^*, \mathfrak{B}, \nu)$ 上的流。由(7.2)式與(7.11)式可知，它同構於複Brown運動的流，因而作爲一個流，它跟 $\{T_t\}$ 具有相同的性質。

現在我們回來討論(7.3)節所定義的單值算子 $U_t=U_{\pi_t}$。爲此，我們複習一下隨機荷佈的定義〔參見第1.3節[1]〕。透過雙線性形式 $\langle z,\zeta\rangle$，每個 $z\in\mathscr{S}_c^*$ 定義了一個從 $\mathscr{S}_c$ 到 (L_c^2) 的映射，故可視爲一組隨機變數，那麼 z 就是一個複的隨機荷佈。進一步，$\{\langle z,\zeta\rangle: \zeta\in\mathscr{S}_c\}$ 與 $\{\langle z,S_t\zeta\rangle: \zeta\in\mathscr{S}_c\}$ 兩個系統具有相同的機率分佈，故我們就得到一個定常的隨機荷佈了（參見第3.4節）。從而有下面的值譜表現

$$\langle z,\zeta\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathscr{F}\zeta)(\lambda) M(d\lambda, z), \tag{7.13}$$

其中 $\{M(d\lambda)\}$ 爲齊次（$E|M(d\lambda)|^2 = d\lambda$）複的Gauss隨機測度。以 U_t 爲作用函數 $\langle z,\zeta\rangle\in\mathscr{H}_{(1,0)}$，得到

$$U_t\langle z,\zeta\rangle = \langle \pi_t^* z,\zeta\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathscr{F}\zeta)(\lambda) M(d\lambda + t).$$

換言之，此時算子 U_t 對於(7.13)式之隨機測度 M 定義了一個移位：

$$U_t M(d\lambda) = M(d\lambda + t). \tag{7.14}$$

今 $\mathscr{H}_{(1,0)}$ 的一般元素可以利用 $M(d\lambda)$ 表成下形

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) M(d\lambda), \qquad g \in L_c^2(\mathbf{R}),$$

故對於這種元素我們有

$$U_t \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) M(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda - t) M(d\lambda), \tag{7.15}$$

亦即 $\{U_t\}$ 對函數 g 定義了一個移位。

今考慮 U_t 及其共軛之間的關係，我們有

$$U_t \overline{\varphi(z)} = \overline{\varphi(\pi_t^* z)} = \overline{U_t \varphi(z)}.$$

最後我們注意到，U_t 具有下面的乘法拆開性：

$$U_t(\varphi_1(z)\varphi_2(z)) = \{U_t\varphi_1(z)\}\{U_t\varphi_2(z)\}.$$

於是利用（7.15）式可以很清楚地看出，這個算子如何對（L_c^2）作用。

到現在爲止，我們分別研究過三個一參數子群 $\{I_t\}$，$\{S_t\}$ 與 $\{\pi_t\}$；現在我們來觀察它們之間的關係，這也是很有趣的。顯然，$\{I_t\}$ 跟 $\{S_t\}$ 與 $\{\pi_t\}$ 兩者都是可交換的，而 $\{S_t\}$ 與 $\{\pi_t\}$ 又滿足所謂的Weyl交換關係：

$$\pi_t S_s = I_{st} S_s \pi_t, \qquad -\infty < s, t < \infty. \tag{7.16}$$

這三個一參數群構成了 $U(\mathscr{S}_c)$ 的一個三維子群。

其次考慮線性Lie群 $SL(3, \mathbf{R})$ 的子群 H_1，定義如下：

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{R} \right\}.$$

任何跟H_1同構的群稱爲(一維)的一個Heisenberg群。顯然H_1是由下面三個一參數子群所生成的:

$$\left\{\alpha_t=\begin{pmatrix}1&t&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\},\quad \left\{\beta_t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\ \text{且}\ \left\{\gamma_t=\begin{pmatrix}1&0&t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

群H_1的中心是$\{\gamma_t\}$,並且子群$\{\alpha_t\}$與$\{\beta_t\}$滿足下面的交換關係:

$$\alpha_t\beta_s=\gamma_{ts}\beta_s\alpha_t.$$

令I_t,S_t及π_t分別相應於γ_t,β_t及α_t,我們看出,由$\{I_t, S_t, \pi_t\}$所產生的三維Lie 群,局部地同構於Heisenberg 群。

順便我們也注意到下面三個方陣

$$\alpha=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \gamma=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可以取作相應於H_1的Lie 代數之基底,並且它們的交換關係爲

$$[\alpha,\beta]=\gamma,\qquad [\alpha,\gamma]=[\beta,\gamma]=0.$$

n維的Heisenberg 群H_n跟上述的定義一樣,但是要將定義H_1的矩陣元a,b改成n維向量。下面的群

$$Z_n=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&2k\pi\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\&\cdots&&&&1\end{pmatrix}:k\ \text{爲整數}\right\}$$

是H_n的一個正規子群,並且在第5.8節所給定的群G_n同構於H_n/Z_n。

[2] Fourier-Mehler 變換群

現在我們來建構$U(\mathscr{S}_1)$的一個一參數子群,由Fourier 變換的冪次,但不必是整冪次所組成。

下面的積分核

$$K_\theta(u, v) = [\pi(1 - \exp(2i\theta))]^{1/2} \exp\left[-\frac{i(u^2 + v^2)}{2\tan\theta} + \frac{iuv}{\sin\theta}\right] \tag{7.17}$$

定義了一個算子 $\mathscr{F}_\theta$ ，如下：

$$(\mathscr{F}_\theta\zeta)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\theta(u, v)\zeta(v)\, dv, \qquad \theta \neq \frac{1}{2}k\pi. \tag{7.18}$$

令 $\{\zeta_n(u) : n \geq 0\}$ 爲由（7.6）式所定義的一組函數，則可以證明

$$\mathscr{F}_\theta \zeta_n(u) = e^{in\theta}\zeta_n(u), \qquad n \geq 0. \tag{7.19}$$

爲此，首先我們觀察到 $H_n(u)\exp(-\frac{1}{2}u^2)$ 的生成函數爲

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(u)\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) = \exp\left(2tu - t^2 - \frac{1}{2}u^2\right).$$

其次，將 $\mathscr{F}_\theta$ 作用到右項，則得到

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} K_\theta(u, v)\exp\left[2tv - t^2 - \frac{1}{2}v^2\right] dv \\
&\quad = [\pi(1 - \exp(2i\theta))]^{-1/2} \exp\left[-t^2 - \frac{iu^2}{2\tan\theta}\right] \\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\left(\frac{iu}{\sin\theta} + 2t\right)v - \left(\frac{i + \tan\theta}{2\tan\theta}\right)v^2\right] dv \\
&\quad = [\pi(1 - \exp(2i\theta))]^{-1/2}[-2i\sin\theta \cdot \exp(i\theta)]^{1/2} \exp\left[-t^2 - \frac{iu^2}{2\tan\theta}\right] \\
&\qquad \times \exp\left[-\frac{1}{2}i\sin\theta\exp(i\theta)\left(\frac{iu}{\sin\theta} + 2t\right)^2\right]
\end{aligned}$$

（參見命題 6.5 的證明中所用的公式）

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(2ut\exp(i\theta) - [t\exp(i\theta)]^2 - \frac{1}{2}u^2\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{in\theta} H_n(u)\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right).
\end{aligned}$$

比較兩邊 i^n 的係數，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\theta(u, v)H_n(v)\exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right)dv = e^{in\theta}H_n(u)\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right),$$

兩邊再適當乘以一個常數，這恰好就是 (7.19) 式。

對於例外的點 $\theta=\frac{1}{2}\pi k$，$k=0$，± 1，± 2，……，我們討論如下：首先定義 $\mathscr{F}_\theta \xi_n(u)$ 爲 $e^{in\theta}\xi_n(u)$，則 $\mathscr{F}_\theta$ 可以線性地延拓到整個空間 $\mathscr{S}_c$ 上，這是辦得到的，因爲 $\{\xi_n\}$ 構成了 $\mathscr{S}_c$ 中的一組完備么正系統。如此這般，在 $\mathscr{S}_c$ 上所得到的線性算子 $\mathscr{F}_\theta$，$-\infty<\theta<\infty$，皆屬於 $U(\mathscr{S}_c)$ 並且滿足：

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}_\theta \mathscr{F}_{\theta'} = \mathscr{F}_{\theta+\theta'} = \mathscr{F}_{\theta''}, \qquad \theta+\theta'=\theta''(\text{mod } 2\pi);\\ &\mathscr{F}_\theta \to I \text{（單位算子）當 } t\to 0\end{aligned} \tag{7.20}$$

因此我們就有了一參數群 $\{\mathscr{F}_\theta：-\infty<\theta<\infty\}$，具有 2π 週期。

對 θ 取特殊的值，就得到

$$\mathscr{F}_{\pi/2}=\mathscr{F}, \qquad \mathscr{F}_{3\pi/2}=\mathscr{F}^{-1},$$

這顯示出我們所得到的一參數單直群含有 Fourier 變換及反 Fourier 變換。現在我們複習一下 Fourier 變換的基本性質：它交換了下面兩個算子，一個是將函數乘以一個獨立於該函數的隨機變數，另一個是微分算子（除了差個常數因子 i 之外）。下面的式子牽涉到 (7.17) 式所給定的核 $K_\theta(u, v)$，可以看作是此性質的一個推廣：

$$vK_\theta(u, v)=\left(u\cos\theta - i\frac{\partial}{\partial u}\sin\theta\right)K_\theta(u, v).$$

這些註解導致我們形式地考慮下面的等式：

$$\mathscr{F}_{r\pi/2}=(\mathscr{F})^r,$$

其中 r 爲任意實數，並且將 $\{\mathscr{F}_\theta\}$ 看作是 $U(\mathscr{S}_c)$ 的子群，由 Fourier 變換的任意冪次所組成的（參見圖 11）。

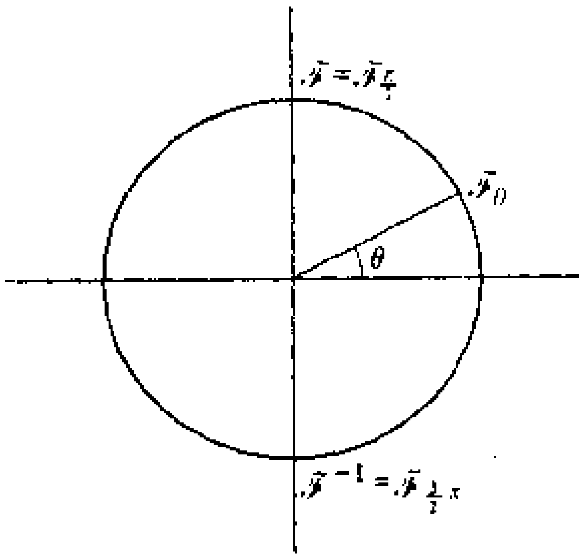


圖 11

[註解]　Fourier 變換的任意冪次是 N.Wiener (1928 — 1929) 首度考慮的。

讓我們將 $\zeta \in \mathscr{S}_c$ 表成下形

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi_n$$

其中 $\{\xi_n\}$ 爲上述所引進的完備么正系統。於是有

$$\mathscr{F}_\theta \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \xi_n \tag{7.21}$$

因此由 (7.3) 式所定義的單值算子 $U_\theta = U_{\mathscr{F}_\theta}$，其作用方式如下：

$$U_\theta \langle z, \zeta \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-in\theta} \langle z, \xi_n \rangle.$$

特別地，關係式 $U_\theta < z, \xi_n > = e^{-in\theta} < z, \xi_n >$ 成立，並且 U_θ 的作用是乘法式的，故對於 (6.28) 式的 $\varphi(z)$ (令 $\omega_n = \xi_n$)，我們有

$$U_\theta \varphi(z) = \exp\left[i\theta \sum_k (q_k - p_k)\right] \varphi(z),$$

亦即，一個複的Fourier -Hermite 多項式是任何U_θ的固有函數。由定理6.2知，所有這種多項式所成的集合是完備的，因而窮盡了所有固有函數。

今由於求和是對整個整數集Z來作的，故我們可以取到無窮多個（j_k，p_k，q_k：$k \geq 1$）使得$\sum_k j_k(p_k - q_k) = n$。因此單直群$\{U_\theta\}$的值譜是$\mathbf{Z}$，並且重複度爲均勻地可列無限。我們可以把這個結果用值譜表現敍述如下：值譜測度$dE(\lambda)$的擔台爲$\mathbf{Z}$，並且對每個$n \in \mathbf{N}$，$E(n) - E(n-0)$爲投影到無窮維子空間之投影算子。

映射

$$z \to \{\langle z, \xi_n \rangle : n \geq 0\} \in \mathbf{R}^\infty, \qquad z \in \mathscr{S}_c^*,$$

給出了z的座標表現，在下面意味下：每個$\langle z, \xi_n \rangle$爲$z \in \mathscr{S}_c^*$沿ξ_n方向的投影。由Hermite多項式的性質可知，ξ_n具有n個零點，分隔了ξ_{n-1}的零點，故當n越增時，ξ_n的零點也隨著增加，因而閃動得越厲害。這個現象可以由考慮導微的L^2範數來加以說明：因爲

$$\|\xi_n'\|^2 = \left\| \sqrt{\frac{1}{2}n}\,\xi_{n-1} - \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)}\,\xi_{n+1} \right\|^2 = n + \frac{1}{2},$$

故當n變大時，它也增大。根據下面的公式，利用U_θ我們可以將z在ξ_n方向的成分$\langle z, \xi_n \rangle$從$\langle z, \xi \rangle$中扣去：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} U_\theta \langle z, \zeta \rangle \, d\theta = a_n \langle z, \xi_n \rangle, \qquad a_n = a_n(\zeta) = \langle \zeta, \xi_n \rangle.$$

因此這個方法類似於有關求Fourier係數的方法。在這個意味之下，我們看出了U_θ與複白噪聲的樣本函數之密切關係。

[3] 膨脹（或張力）群

對$\zeta(u)$中的變數u作膨脹：

$$\tau_t : \zeta(u) \to (\tau_t \zeta)(u) = \zeta(ue^t)e^{t/2}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{7.22}$$

所得的在$\mathscr{S}_c$上的線性變換τ_t叫做膨脹映射。如我們已經討論過的例子

一樣，$\{\tau_t: -\infty < t < \infty\}$ 構成了一個一參數群，它是 $U(\mathscr{S}_c)$ 的另一個重要子群。它之所以重要的一個理由是由於它跟移位具有密切的關係，利用動力系統的術語來說就是，移位 $\{S_t\}$ 橫貫過 $\{\tau_t\}$。這個事實可以用下面的公式來表示：

$$S_t\tau_s = \tau_s S_{t\exp(s)}, \qquad -\infty < t, s < \infty. \tag{7.23}$$

此式可以利用類似於第五章 (5.15) 式來闡釋，因此我們不再細究下去。

到現在為止，我們已經討論了 $U(\mathscr{S}_c)$ 的五個一參數子群，其中我們特別強調了Fourier 變換。現在我們要把五者合起來一齊討論。我們可以利用這些子群在 $(\mathscr{S}_c^*, \mathscr{B}, \nu)$ 上的流之值譜類型來將它們作粗略的分類。

(a) Lebesgue 值譜且具有可列無限重度者（σ-Lebesgue 值譜）：S_t^*，π_t^*，τ_t^*；

(b) 離散值譜（整個 $\mathbf{Z}$）且具有可列無限重度者：I_t^*，$\mathscr{F}_t^*$。

另外還有其它問題也會出現，例如，這些一參數子群有何關係〔比如 (7.23) 式〕，由上述五個子群所產生的子群有何性質等等。為了回答這些問題，我們必須引入一參數子群的母算子，並且討論它們的交換關係。

7.4 子群的母算子

考慮 $U(\mathscr{S}_c)$ 的一參數子群 $\{g_t\}$，其母算子定義為 g_t 對 t 作導微並且在 $t=0$ 的取值：

$$\alpha = \frac{d}{dt}g_t\bigg|_{t=0}. \tag{7.24}$$

在本章裡，我們只考慮 α 的定義域是整個空間 $\mathscr{S}_c$ 之情形。

下表我們列出上節所討論過的五個一參數子群之母算子。我們也引入了一些記號。

除了 $\mathscr{F}_t$ 之外，每個母算子的精確形狀都可以由直接計算很容易得到，並且每個母算子的定義域都是整個空間 $\mathscr{S}_c$。再看 $\mathscr{F}_t$，它給在表 1 中的母算子，可以由 (7.17) 式與 (7.18) 式直接計算得到，或是由公式

表 1

一參數子群	母算子
I_t	iI
S_t	$s \equiv -\frac{d}{dv}$
π_t	$i\pi \equiv iu$
$\mathscr{F}_\theta$	$if \equiv -\frac{1}{2}i\left(\frac{d^2}{du^2} - u^2 + 1\right)$
τ_t	$\tau \equiv u\frac{d}{du} + \frac{1}{2}$

$$\left.\frac{d\mathscr{F}_\theta \xi_n}{d\theta}\right|_{\theta=0} = in\xi_n$$

這可以由 (7.19) 式以及固有函數 $\{\xi_n\}$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 構成了完備么正系統這個事實而得到。

現在我們要來探求這些母算子之間的交換關係。兩個算子 α ，β 的交換子，記爲 $[\alpha, \beta]$ ，其定義爲 $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ 。由表 1 取出任何兩個母算子，作出所有的變換子，我們發現了表中所沒有的一個新算子 $\sigma = \frac{1}{2}[\tau, f]$ 。σ 的明確形式爲

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{du^2} + u^2\right). \tag{7.25}$$

形式地說，存在有一個一參數群 $g_t = \exp[i\sigma t]$ ，$-\infty < t < \infty$ ，以 $i\sigma$ 爲母算子，但是至今我們還是無法如前節的例子那樣來解說 $\{g_t^\#\}$ 。介紹過算子 σ 之後，現在我們可以來做出表 2 基本交換關係的表格。

所有這些交換子的計算都很初等，故我們略去不提。

[註解] 如果我們用 $f' = f + \frac{1}{2}I$ 來取代 f ，則表 2 會變得簡單一點。但是我們並不這樣做，我們要強調 f 作爲 $\{\mathscr{F}_\theta\}$ 的母算子之角色。

由這個交換關係的表格我們可以得到許多東西。例如，由交換子來看

表 2 基本的交換關係

$[s,f]=-\pi$	$[\tau,f]=2\sigma$
$[\pi,f]=-s$	$[\sigma,f]=2\tau$
$[\pi,s]=I$	$[\tau,\sigma]=2f+I$
$[\tau,s]=-s$	$[\sigma,s]=\pi$
$[\tau,\pi]=\pi$	$[\sigma,\pi]=-s$
I 跟每個母算子皆可交換	

，f 交換了移位的母算子與乘法算子群之母算子，這刻劃了流 $\{T_t\}$ 與 $\{\pi_t^*\}$ 之間的關係。由 (7.23) 式所表示的 $\{S_t\}$ 與 $\{\tau_t\}$ 之間的關係，對於 $\{\pi_t\}$ 與 $\{\tau_{-t}\}$ 仍然成立。整個說起來，基本的交換關係使我們可以動力地來描述六個一參數群。

用代數眼光來看表 2，我們可以總結成下面的結果。設 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{R}$ 分別爲由 $\{I, s, \pi, f, \tau, \sigma\}$ 與 $\{I, s, \pi\}$ 所產生的代數，係數體皆爲 $\mathbf{R}$。

【命題 7.3】

如果在 $\mathfrak{A}$ 中定義乘法爲交換子 $[\cdot,\cdot]$，則 $\mathfrak{A}$ 成爲一個 Lie 代數，並且 $\mathfrak{R}$ 爲 $\mathfrak{A}$ 的根式 (radical)。

這個命題的證明是基本交換關係的立即結論。

[註解] 因爲由單直群 $U(\mathscr{S}_c)$ 所得到的向量空間，其一個基底恰好是由上述母算子所構成，故也許是考慮 $\mathfrak{A}$ 的複化 $\mathfrak{A}_c=\mathfrak{A}+i\mathfrak{A}$ 比實的代數 $\mathfrak{A}$ 本身要來得合理。但是，我們注意到，利用這個基底，複 Lie 代數的結構常數都是實值的，故我們只要考慮實形式的 $\mathfrak{A}_c$，即 $\mathfrak{A}$ 就好了。

把我們已討論過的東西重述並且綜合成部分的結論，這就是下面的命題。

【命題 7.4】

一參數子群 $\{I_t\}$，$\{S_t\}$，$\{\pi_t\}$，$\{\mathscr{F}_\theta\}$，$\{\tau_t\}$ 產生了 $U(\mathscr{S}_c)$ 的一個六維子群 G。當 G 賦予由 $U(\mathscr{S}_c)$ 所誘導出的位相時，G 就成爲一個 Lie 群

，並且其 Lie 代數就是 $\mathfrak{A}$ 的複化 $\mathfrak{A}_c$。

［註解］ 代數 $\mathfrak{A}$ 的根式 $\mathfrak{R}$ 爲 Heisenberg 群的 Lie 代數。

我們已經看過，$\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{A}_c$ 既不單純也不半單純，不過不管這些，Lie 群 G 與 Lie 代數 $\mathfrak{A}_c$ 對我們還是有趣的。理由是，除了我們已經看過的，它們具有機率及力學的性質之外，它們還具有跟微分方程論密切的關連。

7.5 熱傳導方程的對稱群

本節我們要來展示，如何用上節所引入的 Lie 群 G 來研究某些偏微分方程，尤其是熱傳導方程的解空間之對稱性。這是 W. Miller Jr. (1968) 所引入的，也可參見他的講義稿。

給一維的熱傳導方程

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t) \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad t \in (0,\infty), \tag{7.26}$$

我們採用下列步驟來澄清解空間的幾何構造。首先我們令

$$Q = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^2}, \tag{7.27}$$

再令 $\mathfrak{G}$ 爲由下列所有一階微分算子所生成的向量空間：

$$L = X(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + T(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + U(x,t) \tag{7.28}$$

其中

1. X，T 及 U 對 x 與 t 是解析的；並且
2. 由 $Qv = 0$ 可得 $QLv = 0$。

下面命題是這些定義的基本結論。

【命題7.5】

一個形如(7.28)式之微分算子 L 屬於 $\mathfrak{G}$ 的充要條件是存在一個函數 $R(x, t)$，對 x 與 t 都是解析的，使得

$$[L, Q] = R(x, t)Q. \tag{7.29}$$

我們也很容易可以證明：

【命題7.6】

當向量空間 $\mathfrak{G}$ 賦予交換子乘積[·,·]時，則成爲一個Lie 代數。

對於足夠小的 t，讓我們定義 L 的指數映射爲

$$\exp(tL) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L^n.$$

有了這個記號規定，我們就有

【命題7.7】

形如

$$\exp(t_1 L_1)\exp(t_2 L_2) \cdots \exp(t_n L_n) \tag{7.30}$$

之所有算子所成的集合 G，構成了一個局部Lie 群，但是其中 $\{L_1, \cdots\cdots, L_n\} \subseteq \mathfrak{G}$，且 $\{t_1, \cdots\cdots, t_n\}$ 落在0的一個近旁。

上述結果的詳情請讀者參閱W. Miller Jr 的講義。

【定義7.2】

在命題7.7中的群 G 稱爲 Q 的對稱群(symmetry group)。

［註解］ 我們只討論了有關熱傳導方程的算子 Q，不過上述的結果與定義都可以很容易推廣到更廣一類具有解析係數之偏微分算子 Q。

有了上述所預備的背景，現在我們可以利用Lie 代數來討論熱傳導方程的對稱性了。

【定理 7.1】

(W.Miller Jr.) Lie 代數𝔊是六維的，並且下面的算子構成了𝔊的一個基底：

$$I\text{（單位映射）}\ L_{-2}=\frac{\partial}{\partial t},\qquad L_{-1}=\frac{\partial}{\partial x},\qquad L_0=x\frac{\partial}{\partial x}+2t\frac{\partial}{\partial t},$$

$$L_1=t\frac{\partial}{\partial x}+x,\qquad L_2=tx\frac{\partial}{\partial x}+t^2\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}(x^2+t). \tag{7.31}$$

現在我們來到了我們的主題面前，我們要來展示命題 7.7 中的群 G 用來描述熱傳導方程的對稱性時所扮演的角色。令 $g(t;x)$ 爲 Gauss 核：

$$g(t;x)=(2\pi t)^{-1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right),$$

並且令𝔖表示形如

$$v\equiv v(x,t;\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(u)g(t;x-u)\,du,\qquad \zeta\in\mathscr{S}_c. \tag{7.32}$$

的所有複值函數 v 所成的集合。這樣定義的任何函數 v 都是熱傳導方程（7.26）式的一個解答，因此𝔖爲（7.26）式的解空間的一個子空間。v 的定義給出了一個從 $\mathscr{S}_c$ 到𝔖的對射 T：

$$T:\zeta\to v(x,t;\zeta),\qquad \zeta\in\mathscr{S}_c.$$

因此我們可以對𝔖引入一個位相構造，使得 T 成爲一個同胚。

對於 $U(\mathscr{S}_c)$ 的任何連續的一參數子群 $\{g_t\}$ 都對應有一個連續的一參數群 $\{\tilde{g}_t\}$，作用在𝔖上如下：

$$\tilde{g}_t=Tg_t,\quad \text{i.e.}\quad \tilde{g}_t v(x,s;\zeta)=v(x,s;g_t\zeta),\qquad -\infty<t<\infty.$$

$\{\tilde{g}_t\}$ 與 $\{g_t\}$ 的母算子由下式關連起來：

$$\left.\frac{d}{dt}\tilde{g}_t\right|_{t=0}=T\left.\frac{d}{dt}g_t\right|_{t=0}, \tag{7.33}$$

此式在 $\mathscr{S}_c$ 及 $\{g_t\}$ 的母算子的定義域之交集上成立。今已知第 7.3 節所引入的所有一參數子群的母算子，σ 亦然，它們的定義域均落在 $\mathscr{S}_c$ 之中，因此利用 (7.32) 式我們就可以得到相應微分算子在 $\mathfrak{S}$ 上的精確公式。這些我們列在下面表 3 裡。

表 3

$I \to I$（ $\mathfrak{S}$ 上的單位映射 ）
$\xi \to -\dfrac{\partial}{\partial x}$
$\pi \to t\dfrac{\partial}{\partial x} + x$
$\tau \to 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + x\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{2}$
$f \to (t^2 - 1)\dfrac{\partial}{\partial t} + tx\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{2}(x^2 + t - 1)$
$\sigma \to (t^2 + 1)\dfrac{\partial}{\partial t} + tx\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{2}(x^2 + t)$

求得這些微分算子的計算都很基本（例如分部積分等等），只需用 $\partial/\partial x^2$ 取代 $2(\partial/\partial t)$，這是由於 $\mathfrak{S}$ 被包含於熱傳導方程 (7.26) 式的解空間，這個事實的結論。

考慮表 3 中微分算子的表式，很容易就得到下面的結果：

【命題 7.8】

由表 3 中的微分算子（包括 I ）所生成的實向量空間，若賦予乘積 $[\cdot,\cdot]$，則成爲一個 Lie 代數，並且同構於定理 7.1 的代數 $\mathfrak{G}$。

因此，對於 (7.30) 式所給定的 Q 之對稱群，我們已得到另一種描述，利用 Lie 代數來描述。

至今我們討論對稱性時，都假定群 G 爲已知，現在我們來證明 $\mathfrak{S}$ 的自同構之某些性質完全決定了這個對稱性。我們的意思是，所有 $\mathfrak{S}$ 的自同構都是由 G 透過映射 T 得到的。

我們已賦予空間 $\mathfrak{S}$ 位相構造，使得映射 $T : \mathfrak{S} \to \mathscr{S}_c$ 變成一個同胚。對於 S 中的任意平滑曲線 $\{v_t\}$， $v_0 = v$ ，在 $\mathscr{S}_c$ 中存在一條平滑曲線 $\{\zeta_t\}$

，$\zeta_0=\zeta$ ，使得

$$T\zeta_s = v_s,$$

並且若在 $\mathscr{S}_c$ 上的無限小變換 α 爲

$$\alpha\zeta = \frac{d}{ds}\zeta_s\bigg|_{s=0},$$

則相應於 α ，在 $\mathfrak{S}$ 上的無限小變換爲

$$L = T\circ\alpha, \quad 其中 \quad Lv = \frac{d}{ds}v_s\bigg|_{s=0}. \tag{7.34}$$

這個表式只不過是（7.33）式的推廣。

今取 **A** 爲 $\mathscr{S}_c$ 上無限小變換 α 而又滿足下列條件，所成的空間：

1. 對任意 $\alpha\in$ **A** ，$L=T\circ\alpha$ 可表成（7.28）式的形式，並且滿足那裡的 1.與 2.之性質；
2. 集合 **A** 包含了 Fourier -Mehler 變換的母算子 f 。
3. 向量空間 **A** 賦予交換子乘積 [· , ·] 後，形成了一個Lie 代數。

由於我們極力強調Fourier 變換的重要性，故上述條件 2 似乎是很合理的。現在我們的問題是，決定出滿足這三個條件的極大Lie 代數 **A** 。

設 L 爲滿足上述 1. 之任一微分算子，則對 $\zeta\in\mathscr{S}_c$ ，我們有

$$\begin{aligned}
Lv(x,t;\zeta) &= \int_{-\infty}^{\infty}\zeta(u)\left[X(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}T(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x,t)\right]g(t,x-u)\,du\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}g(t,x-u)\left[-X(x,t)\frac{d}{du} + \frac{1}{2}T(x,t)\frac{d^2}{du^2} + U(x,t)\right]\zeta(u)\,du\\
&\to \left[-X(x,0)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}T(x,0)\frac{d}{dx^2} + U(x,0)\right]\zeta(x), \qquad t\downarrow 0.
\end{aligned}$$

這些計算明白地描述了 T 的逆映射，並且再由 $\alpha=T^{-1}L$ 與條件 1. ，斷言了：任意 $\alpha\in$ **A** 必具有上面後表式之形式。

變更一下記號，我們可以將 α 表成形如

$$\alpha = A(u)\frac{d^2}{du^2} + B(u)\frac{d}{du} + C(u), \tag{7.35}$$

其中 $A(u)$，$B(u)$ 及 $C(u)$ 都是解析的，因此 A 是所有這種 α 所成的集合。

現在再考慮 2.與 3.的條件，我們看出，f 與任何（7.35）式之 α 的交換子，如下形：

$$\begin{aligned}[\alpha, f] = {} & A'(u)\frac{d^3}{du^3} + \frac{1}{2}(A''(u) + 2B'(u))\frac{d^2}{du^2} \\ & + \frac{1}{2}(4uA(u) + B''(u) + 2C'(u))\frac{d}{du} \\ & + \frac{1}{2}(2A(u) + 2uB(u) + C''(u)).\end{aligned}$$

由 3.可知，所得的結果仍然是（7.35）式的形狀，因此我們必有 $A'(u) = 0$，亦即

$$A(u) = a \quad（常數）$$

因此，對於 A 中每一元素，其 d^2/du^2 項的係數必爲常數。再回到上述的計算，得知 $A''(u) + 2B'(u) = 2B'(u)$ 爲一常數。從而

$$B(u) = bu + c \quad（b，c 爲常數）$$

再比較此式與（7.35）式，我們發現 $4uA(u) + B''(u) + 2C'(u) = 4au + C'(u)$ 必爲 u 的線性函數，亦即

$$C(u) = du^2 + eu + k, \quad（d，e，k 爲常數）$$

今已知所有形如（7.35）式的 α 所成的集合 A 構成了一個 Lie 代數，其中 α 的係數 A，B 及 C 分別爲 0，1，2 次之多項式。我們也可以證明，這個代數跟上一節所述的 Lie 代數 $\mathfrak{A}$ 是一致的。

因此我們已經證明了下面的結果：

【定理 7.2】

由微分算子所形成的Lie代數 $\{L = T \circ \alpha : \alpha \in \mathbf{A}$，且$\mathbf{A}$ 滿足 1.、2.及3.的條件$\}$跟命題7.3裡的Lie代數$\mathfrak{A}$是相同的。

因此我們可以說，利用代數$\mathbf{A}$，映射T以及指數映射，上述的討論決定了局部Lie群。換個等價方式來說，利用另一個建立在機率想法上的方法，我們得到了熱傳導方程的對稱群！

這種求得對稱群的方法可以很容易推廣到多維數的情形。令n維熱傳導方程爲

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \frac{1}{2} \Delta_n v(x, t), \qquad \Delta_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \tag{7.36}$$

其中$t > 0$且$x = (x_1, \cdots\cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$。如$n = 1$的情形之初期函數類取爲Schwartz空間，但現在我們取爲$\mathbf{R}^n$上的急速遞降$\mathscr{C}^\infty$函數空間$\mathscr{S}_c^n$。(7.36)式的Green函數仍爲Gauss核

$$g(t; x) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2t}\right), \qquad t > 0, \qquad x \in \mathbf{R}^n,$$

其中$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$，並且我們如上述(7.32)式來定義映射$T$

$$T: \zeta \to v = v(x, t; \zeta) = \int_{\mathbf{R}^n} \zeta(u) g(t; x - u)\, du, \qquad \zeta \in \mathscr{S}_c^n. \tag{7.37}$$

函數$v(x, t; \zeta)$顯然是(7.36)式的一個解答，以ζ爲初期函數，因此T爲從$\mathscr{S}_c^n$到解空間的嵌射。如前述，我們令

$$\mathfrak{S}^n = \{T\zeta : \zeta \in \mathscr{S}_c^n\}.$$

並且將$\mathfrak{S}^n$位相化使得T成爲一個同胚。有了$\mathfrak{S}^n$的幫忙，我們就可以求得微分算子

$$Q_n = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta_n. \tag{7.38}$$

的對稱群。其證明跟我們已討論過的 $n=1$ 的情形類似，因此我們只提差異之點。如先前所述，由 $\mathfrak{S}^n$ 中曲線的切向量得到 $\mathscr{S}_c^n$ 上的微分算子之空間 $\mathbf{A}_n$ 後，我們將 $\mathbf{A}$ 所滿足的條件 1. 與 2. 分別改成 $\mathbf{A}_n$ 滿足 1_n 與 2_n，而 3 仍然保持不變，其中

1_n 對任意 $\alpha\in\mathbf{A}_n$，每個 $L=T\circ\alpha$ 可表成下形

$$\sum_{j=1}^{n} X_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}+T(x,t)\frac{\partial}{\partial t}+U(x,t), \tag{7.39}$$

其中

(a) $X_j(x,t)$，$1\leq j\leq n$，$T(x,t)$ 及 $U(x,t)$ 對 x，t 都是解析的，並且

(b) $[L,\dot{Q}_n]=R(x,t)Q_n$，其中 $R(x,t)$ 爲某函數，對 x，t 是解析的。

2_n $\mathbf{A}_n$ 包含有微分算子

$$f_n=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial u_j^2}-u_j^2+1\right), \quad (f\text{ 的一個推廣}) \tag{7.40}$$

在 1_n、2_n 及 3 的條件下，每個 $\alpha\in\mathbf{A}_n$ 都可以表成

$$\alpha=a_0+\sum_k a_k u_k+\sum_k b_k\frac{\partial}{\partial u_k}+\sum_k c_k u_k^2+\sum_k d_k\frac{\partial^2}{\partial u_k^2}+\sum_{k,j}e_{k,j}u_k\frac{\partial}{\partial u_j}. \tag{7.41}$$

自然地，對於係數 $a_0, a_k,\cdots\cdots, e_{k,j}$ 必須作某些限制，並且利用 Fourier 變換來敍述這些是很方便的。記 ζ 的 Fourier 變換爲 $\hat{\zeta}$，則我們有

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha\zeta}(\lambda)=\Big\{&a_0-i\sum_k a_k\frac{\partial}{\partial\lambda_k}-i\sum_k b_k\lambda_k-\sum_k c_k\frac{\partial^2}{\partial\lambda_k^2}\\&-\sum_k d_k\lambda_k^2-\sum_{k,j}e_{k,j}\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\lambda_j\Big\}\hat{\zeta}(\lambda).\end{aligned} \tag{7.42}$$

其中 $\lambda=(\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_n)$ 。函數 $v(x,t;\zeta)$ 可以寫成

$$v(x,t;\zeta)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\zeta}(\lambda)\exp\left(-\frac{1}{2}t\sum_k\lambda_k^2-i\sum_k x_k\lambda_k\right)d\lambda.$$

因此我們有

$$\begin{aligned}v(x,t,\alpha\zeta)&=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\alpha\zeta}(\lambda)\exp\left(-\frac{1}{2}t\sum_k\lambda_k^2-i\sum_k x_k\lambda_k\right)d\lambda\\&=\left[a_0-i\sum_k a_k\left(ix_k+it\frac{\partial}{\partial x_k}\right)-i\sum_k b_k\left(i\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right.\\&\quad\left.-\sum_k c_k\left(-t-x_k^2-2tx_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)+\sum_{k,j}e_{k,j}x_k\frac{\partial}{\partial x_j}\right]v(x,t;\zeta)\\&\quad+(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(-t^2\sum_k c_k\lambda_k^2-\sum_k d_k\lambda_k^2-t\sum_{k,j}e_{k,j}\lambda_k\lambda_j\right)\hat{\zeta}(\lambda)\\&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2}t\sum_k\lambda_k^2-i\sum_k x_k\lambda_k\right)d\lambda.\end{aligned}$$

欲最後的表式形如 $Lv(x,t;\zeta)$ 並且滿足 1_n 之充要條件是

$$\begin{aligned}&c_k=c,\quad d_k=d,\quad e_{k,k}=e,\quad k=1,\ldots,n;\\&e_{k,j}=-e_{j,k},\quad j\neq k,\quad j,k=1,\ldots,n.\end{aligned}\tag{7.43}$$

其它的常數 a_0,a_k,b_k，$1\le k\le n$，當然可以任意選取。上述的計算易顯示，爲了使 1_n成立，(7.43)式的要求是必要的，並且由直接計算也很容易證明：形如 (7.41) 式且滿足 (7.43) 式之 α 所成的集合 $\mathbf{A}_n$ ，滿足條件 1_n、2_n 及 3_n 。因此我們已證明了下面的結果：

【定理 7.3】

由形如 (7.41) 式且滿足 (7.43) 式之所有微分算子所成的集合 $\mathbf{A}_n$構成了一個 Lie 代數，並且同構於 Lie 代數 $\mathfrak{A}_n$ ，其中$\mathfrak{A}_n$爲 (7.38)式之算子 Q_n 的對稱群。同構映射是由 (7.37) 式所引進的映射T ：

$$T:\alpha\to L=T\circ\alpha\in\mathfrak{A}_n,\qquad\alpha\in\mathbf{A}_n.$$

［推論］　Q_n 的對稱群爲（$\frac{1}{2}n(n+3)-4$）維。

［證明］　問題中的維數等於 $\mathfrak{A}_n$ 的維數，因而等於 $\mathbf{A}_n$ 的維數。它必等於常數（$a_0, a_k, b_k, 1 \leq k \leq n$）的個數，再加上出現於（7.41）式但受制於（7.43）式的常數（$c_k, d_k, e_{kj}, 1 \leq j, k \leq n$）之個數。這恰好等於

$$2n+1+3+\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}n(n+3)+4. \qquad \#$$

［註解］　類似於前節命題 7.3之後所提到過的理由，只需討論實形式 $\mathfrak{A}_n$ 之Lie 代數。

［例子］　在 $n=2$ 的特殊情形，我們將展示 $\mathfrak{A}_2$ 與 $\mathbf{A}_2$ 的實際形式，並且描述它們之間的映射 T。$\mathbf{A}_2$ 的一個基底如下：

$$\begin{gathered}
I,\quad \frac{\partial}{\partial u_1},\quad \frac{\partial}{\partial u_2},\quad u_1,\quad u_2,\\
\frac{\partial^2}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial u_2^2},\quad u_2\frac{\partial}{\partial u_1}-u_1\frac{\partial}{\partial u_2},\\
u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+u_2\frac{\partial}{\partial u_2},\quad u_1^2+u_2^2.
\end{gathered} \tag{7.44}$$

在 T 的變換之下，它們分別變成：

$$\begin{gathered}
I,\quad \frac{\partial}{\partial x_1},\quad \frac{\partial}{\partial x_2},\quad t\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1,\quad t\frac{\partial}{\partial x_2}+x_2,\\
2\frac{\partial}{\partial t},\quad x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2},\\
2t\frac{\partial}{\partial t}+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2},\quad 2t^2\frac{\partial}{\partial t}+2t\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+(x_1^2+x_2^2+2t).
\end{gathered} \tag{7.45}$$

這些映像形成了 $\mathfrak{A}_2$ 的一個基底。不消說，$\mathfrak{A}_2$ 的維數爲 9（$=\frac{1}{2}2(2+3)+4$）。

讓我們注意到，(7.45)式之微分算子與$Q_2=(\partial/\partial t)-\frac{1}{2}([\partial^2/\partial x_1^2]+[\partial^2/\partial x_2^2])$具有交換關係。在(7.45)式中，首兩行的算子都跟Q_2具有交換關係，而

$$\left[2t\frac{\partial}{\partial t}+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2},Q_2\right]=-2Q_2.$$

並且

$$\left[2t^2\frac{\partial}{\partial t}+2t\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+(x_1^2+x_2^2+2t),Q_2\right]=-4tQ_2.$$

[註解] 我們注意到，在例子裡出現了平面旋轉之母算子：

$$x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

這是預料中事，並且相應於一維的情形。

7.6 對 Schödinger 方程的應用

由波動力學的理論我們知道，描述力學系統的狀態之波動函數是 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi. \tag{7.46}$$

的解答。在此方程中的算子H叫做Hamilton算子，它是由古典力學的Hamilton函數$H(p,q)$將變數q，p分別改成乘法算子q（即乘以變數q的操作），以及$(\hbar/i)(\partial/\partial q)$而得到的。當$p$與$q$是向量時，上述算子是逐成分操作的。

方程式(7.46)式的所有解答構成了一個向量空間，即所有波動函數所成的空間。我們要來研究這個空間的構造。由於不可能研究這個結構之最一般情形，故我們只考慮當H取簡單形式時之少數幾個對稱群。

以下我們取 Planck 常數$\hbar$為1，並且取$m=1$。

[1] 自由粒子

爲了跟先前的記號一致起見，空間變數的記號將記爲 x，u 等等。對於 n 個粒子的情形，波動函數 $\psi(x,t)$，$x\in\mathbf{R}^n$，$t>0$，是 Schrödinger 方程

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\frac{1}{2}\Delta_n\psi(x,t),\qquad \Delta_n=\sum_1^n\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}. \tag{7.47}$$

的解答。暫時我們從 Schwartz 空間 $\mathscr{S}_c^n$ 中取初期狀態：

$$\psi(x,0)\in\mathscr{S}_c^n. \tag{7.48}$$

當 $\mathscr{S}_c^n$ 包含複值函數時，這是很方便的取法。

方程式 (7.47) 式的 Green 函數爲

$$K(t,x-u)=(2\pi it)^{-n/2}\exp\left(-\frac{\|x-u\|^2}{2it}\right) \tag{7.49}$$

這跟 Gauss 核具有相同的形式，將 K 中的 it 改成 t 就得到熱傳導方程的 Green 函數了。因此採用類似於上一節的論證，就可以形式地得到對稱性了。然而我們應注意的是，$K(t,x-u)$ 的絕對值爲 $(2\pi t)^{-n/2}$，故 K 對 u 是不可積分的。不過，若 $\zeta\in\mathscr{S}_c^n$，則積分

$$\psi(x,t;\zeta)=(2\pi it)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n}\zeta(u)\exp\left(-\frac{\|x-u\|^2}{2it}\right)du \tag{7.50}$$

確實存在，並且 ψ 對 t 與 x 的偏導微也存在，對於跟積分號可交換的微分算子作用 ψ 亦存在，而沒有任何困難。

有了這些認識，我們要來給波動函數所成的空間

$$\mathfrak{S}^n=\{\psi(x,t;\zeta);\ \zeta\in\mathscr{S}_c^n\}$$

賦予位相，使得 $\mathfrak{S}^n$ 同胚於 $\mathscr{S}_c^n$，然後證明 $\mathfrak{S}^n$ 的同構群之 Lie 代數同構於熱傳導方程的對稱群之 Lie 代數，因此它是 $(\frac{1}{2}n(n+3)+4)$ 維的。

為了具體與簡潔起見，我們要來討論一維波動方程 $\psi(x, t)$，$x \in \mathbf{R}$，$t \geq 0$ 的顯公式。如前述，令 T 為如下的映射：

$$T: \zeta \to \psi(x, t; \zeta) \in \mathfrak{S}.$$

則（參見第 7.4 節）Lie 群 G 的一參數子群 $\{g_t\}$ 定出了一個母算子 α，從而利用 T 又在 $\mathfrak{S}$ 上定出了一個母算子 L：

$$\psi(x, t; \alpha\zeta) = L\psi(x, t; \zeta).$$

我們把這個對應列成下表，類似於上節的表 3。

表 4

$$I \to I$$
$$s \to L_s = -\frac{\partial}{\partial x}$$
$$\pi \to L_\pi = it\frac{\partial}{\partial x} - x^{\dagger}$$
$$\tau \to L_\tau = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}$$
$$f \to L_f = i(t^2+1)\frac{\partial}{\partial t} + itx\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}(x^2 + it - 1)$$
$$\sigma \to L_\sigma = i(t^2-1)\frac{\partial}{\partial t} + itx\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}(x^2 + it)$$

† 這個算子跟 Galileo 變換有關。

由此表可看出，只要將表 3 中的 t 改成 it 就可以得到此表了。這當然跟（7.47）式與（7.36）式之間的關係是一致的。同理，形式地說，若我們將 $\partial/\partial t$ 代以 $\frac{1}{2}i\partial^2/\partial x^2$ 則當 $t \downarrow 0$ 時，表 4 中微分算子之右項趨近於相應的左項。

跟熱傳導方程還有許多其它的相似性，不過也有值得一提的一個差異處。這就是，由表中的算子 L 之形式，要求我們必須去建構複的 Lie 代數這個事實。對於由這些算子所生成的複向量空間，我們引入一個交換子乘積如下：

$$[A + iB, A' + iB'] = [A, A'] - [B, B'] + i([A, B'] + [B, A']),$$

其中A，A'，B，B' 都是顯然的實 Lie 代數的元素（參考 $\partial/\partial x$，$t\,\partial/\partial x$）。由表 4 中的算子 L（包括 I）所生成的向量空間 $\mathfrak{L}$，在這個乘積之下，構成了一個 Lie 代數，並且這些算子（包括 I）構成了此代數的一個基底。它們的交換關係恰好跟基本的交換關係相同，亦助 $\mathfrak{L}\cong\mathfrak{A}$。

［註解］ 由最後一個敍述可知，L 具有實形式，例如，可參見 S. Helgason（1962），第三章。然而對於母算子 L，我們仍然保持上述的記號，還可以引起我們注意它們的意義。

現在我們已經澄清了 Lie 代數 $\mathfrak{L}$ 的構造，故描述空間 $\mathfrak{S}$ 的構造所用之 $(1/i)(\partial/\partial t)-\frac{1}{2}(\partial^2/\partial x^2)$ 的對稱群，是由一參數群所生成的，此一參數群是由指數映射作用到 L_t, L_T, iI, iL_π，iL_f，及 iL_a 所得到的。

［2］ 在常數外在場中的粒子

現在我們要將［1］作簡單推廣，使得單一個粒在常數外在場 F 的作用下。此時一維的 Schrödinger 方程爲

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi+Fx\psi, \tag{7.51}$$

並且 Green 函數 K 爲

$$K(t,x,u)=(2\pi it)?^{1/2}\exp\left[\frac{1}{2t}i(x-u)^2+\frac{1}{2}iFt(x+\mu)-\frac{iF^2t^3}{24}\right]. \tag{7.52}$$

對於這種情形我們也可以仿第 7.5 節來進行。首先建構形如

$$\psi(x,t;\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(u)K(t,x,u)\,du,\qquad \zeta\in\mathscr{S}_c.$$

的波動函數所形成的空間 $\mathfrak{S}$，然後將 Lie 代數 $\mathfrak{A}$ 的元素作用到元素 $\zeta\in\mathscr{S}_c$，而求得 $\mathfrak{S}$ 上的無限小變換，如 I，I，及 L_π。例如我們可以得到

$$s \to L_s = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}iFt; \qquad \pi \to L_\pi = it\frac{\partial}{\partial x} + x + \frac{1}{2}Ft^2.$$

同理可以得到其它的對應，但是此地我們要略去不必要的重複 。

[3] 調和振子

這是一個簡單而重要的例子，我們要明白地求出它的對稱性。在古典力學裡，具有頻率ν之一維調和振子，是由下面的方程所描述的：

$$\ddot{q}(t) = -\omega^2 q(t), \qquad \omega = 2\pi\nu,$$

其中我們取原點 0 爲平衡點。令$m\dot{q}(t) = p(t)$，我們看出Hamilton 函數爲

$$H(p, q) = \frac{1}{2}m\dot{p}(t)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q(t)^2.$$

回到我們的方法，如先前，我們令 $\hbar = m = 1$ ，再將q改成x ，則波動函數$\psi(x, t)$，$x \in \mathbb{R}$ ，$t > 0$ 爲Schrödinger 方程

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi - \frac{1}{2}\omega^2 x^2\psi. \tag{7.53}$$

的解答。此時已知Green 函數形如

$$K(t, x, u) = \left(\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega t}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{i\omega(x^2 + u^2)}{2\tan \omega t} - \frac{i\omega x u}{\sin \omega t}\right]. \tag{7.54}$$

如[1]之所爲，計算算子L，就得到下表：

表 5

$$
\begin{aligned}
&T\\
&I \to I\\
&s \to L_s = -\cos \omega t \frac{\partial}{\partial x} - i\omega x \sin \omega t\\
&\pi \to L_\pi = i\frac{\sin \omega t}{\omega}\frac{\partial}{\partial x} + x \cos \omega t\\
&\tau \to L_\tau = x \cos 2\omega t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sin 2\omega t}{\omega}\frac{\partial}{\partial t} + i\omega x^2 \sin 2\omega t + \cos^2 \omega t - \frac{1}{2}\\
&f \to L_f = \left[\frac{ix \sin 2\omega t}{\omega}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2i\sin^2 \omega t}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial t} + x^2 \cos 2\omega t + \frac{i}{2\omega}\sin 2\omega t\right]\\
&\qquad \times \frac{(1-\omega^2)}{2} + i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\\
&\sigma \to L_\sigma = \left[\frac{ix \sin 2\omega t}{\omega}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2i\sin^2 \omega t}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial t} + x^2 \cos 2\omega t + \frac{i}{2\omega}\sin 2\omega t\right]\\
&\qquad \times \frac{(1+\omega^2)}{2} - i\frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}
$$

[註解] 注意到 L_f 有簡單表式。我們也要指出，下面一些不同概念之間的密切關係：調和振子，Fourier-Mehler 變換，(7.6) 式所定義的 $\{\xi_n : n \geq 0\}$，Schwartz 空間 $\mathscr{S}_c$ 等等。不過我們要略去對此點作更進一步的討論。

讓我們複習一下，在第 7.5 節開頭所討論的 W. Miller Jr. 之方法。令

$$Q = i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\omega^2 x^2,$$

再考慮表 5 裡算子之間的交換關係。我們發現它們如下：

$$
\begin{aligned}
&[Q, L_s] = 0, \qquad [Q, L_\pi] = 0,\\
&[Q, L_\tau] = (2\cos 2\omega t)Q, \qquad [Q, L_f] = \frac{i(1-\omega^2)\sin 2\omega t}{\omega} Q,\\
&[Q, L_\sigma] = \frac{i(1+\omega^2)\sin 2\omega t}{\omega} Q.
\end{aligned}
$$

並且可證明每個這種 L 確實都滿足（7.29）式之關係式。

我們用來求例(1)，例(2)及例(3)的對稱群之方法完全跟熱傳方程所用的方法一樣。特別地，Lie 代數 L 恒同構於 $\mathscr{G}$，因此我們就得到互相局部同構的 Lie 群了。從而我們可以證明：

【定理 7.4】

如果 Schrödinger 方程的 Green 函數 K 可以表成下形

$$K(t, x, u) = f(t)\exp[ig(t, x, u)] \tag{7.55}$$

其中 $g(t, x, u)$ 是 x，u 的 2 次多項式，也牽涉 xu 項，則對稱群是六維的 Lie 群，局部地同構於自由粒子的對稱群。

這個結果可以很容易推廣高維度的情形。

第八章

Brown運動的微積算法

本章我們要用新的觀點來探討非線性泛函的分析學，這個工作自動就導致這些泛函的一種推廣。我們的路向是沿着所謂的Brown運動的微積算法來開展的，即在解析Brown運動的泛函時，我們把時間推移的因素也考慮進去。我們先討論我們所採用的一般觀點。

Brown運動的泛函我們簡稱爲Brown泛函。它們可以利用白噪聲來加以表示，這只要將白噪聲看作是Brown運動對時間的導微就好了。考慮白噪聲測度 μ，它是荷佈（馴順荷佈）所成空間 $\mathscr{S}^*$ 上的機率測度。這個測度是由下面的特徵泛函

$$C(\xi) = \exp[-\tfrac{1}{2}\|\xi\|^2], \qquad \xi \in \mathscr{S}, \tag{8.1}$$

以如下的方式唯一決定的：

$$C(\xi) = \int_{\mathscr{S}^*} \exp[i\langle x, \xi\rangle]\, d\mu(x). \tag{8.2}$$

利用這個測度 μ，每個 $x \in \mathscr{S}^*$ 都可以看作是白噪聲 $\dot{W}(t) = dW(t)/dt$ [1] 的樣本函數，從而Hilbert空間 $(L^2) = L^2(\mathscr{S}^*, \mu)$ 就是由具有有限變異數之複值Brown泛函所組成的集合。

我們的主要興趣是在空間 (L^2) 上討論微分學與積分學，我們的做法採用下列三個步驟：(i)第一件必須做的事情是，利用分析學的標準工具來幫忙審視 (L^2) 的元素。爲此，下式所定義的變換 $\mathscr{T}$

$$(\mathscr{T}\varphi)(\xi) = \int \exp[i\langle x, \xi\rangle]\varphi(x)\, d\mu(x), \qquad \varphi \in (L^2), \tag{8.3}$$

[1] 因爲本章的主題是由力學與工程激發出來的，故我們寧可用 $\dot{W}(t)$ 而不用 $W'(t)$ 來表示Brown運動對時間的導微。

再次（參見第 4.3 節）扮演一個基本角色。如我們在第 4.3節已看過的，集合F = $\{\mathcal{T}\varphi : \varphi \in (L^2)\}$ 構成了一個再生核Hilbert 空間，使得在$\mathcal{T}$的作用下，F 同構於（L^2）。於是得到F的 Fock 空間表達式，其方式跟第 4.2節不同。從而我們就得到多重Wiener積分的積分表現。(2)第二步對本章而言是新的。我們在空間（$\mathcal{S}^*$，μ）中引進一個適當的座標系。這使我們可以實現因果分析，亦即在這個分析裡時間的推移也考慮進去了。(3)在這個系統之中，我們將可以引入某一類廣義的Brown 泛函。在這個推廣工作中，我們用到了（L^2）泛函的積分表現，這個想法是P. Lévy 提出的，是他用來研究泛函分析的工具（P. Lévy，1951）。

我們停下來說幾句，以下要做的工作之動機。這是由於研究許多實際問題而引發出來的工作，例如量子力學，尤其是場論中的Feynman 路徑積分理論，以及隨機控制理論，生物集團的隨機演化方程等等。這些問題使我們需要對噪聲或**起落現象**（noise or fluctuations）作一個非線性因果分析，而噪聲或起落的數學表式最常見的就是白噪聲 $\{\dot{W}(t)\}$。

8.1 一些已知結果的摘要

我們很快地複習一下有關Brown 泛函及其積分表現的一些已知結果。詳細情形請參閱第四章。

設（$\mathcal{S}^*$，μ）爲白噪聲的測度空間，其中μ由（8.1）式與（8.2）式所給定，並且令 $(L^2) = L^2(\mathcal{S}^*, \mu)$。設$C(\xi)$給如（8.1）式，則泛函 $C(\xi-\eta)$，$(\xi, \eta) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ 是正定的，因而定義了一個再生核Hilbert 空間，記爲 F。令$\mathcal{T}$給如（8.3）式，我們另有方法來求得（L^2）泛函的積分表現。

【命題 8.1】

以$C(\cdot)$爲核之再生核Hilbert 空間F，在變換$\mathcal{T}$之下，同構於Hilbert 空間（L^2）。

今考慮核$C(\cdot)$的Taylor 展式，其中(ξ, η)表示$L^2(\mathbf{R})$中的內積:

$$C(\xi-\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} C(\xi)\frac{(\xi, \eta)^n}{n!}C(\eta). \tag{8.4}$$

如果我們令

$$C_n(\xi,\eta)=C(\xi)\frac{(\xi,\eta)^n}{n!}C(\eta), \tag{8.5}$$

則C_n是正定的，因而定義了一個再生核Hilbert空間，我們記之爲$\mathbf{F}_n$。事實上，$\mathbf{F}_n$是$\mathbf{F}$的子空間，並且我們可以證明

$$(C_n(\cdot,\eta_1),C_m(\cdot,\eta_2))_{\mathbf{F}}=0 \quad \forall \quad \eta_1,\eta_2\in\mathscr{S},\ m\neq n,$$

這告訴我們子空間$\{\mathbf{F}_n : n\geq 0\}$是互相直交的。於是得到直和分解

$$\mathbf{F}=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\mathbf{F}_n \quad (\text{Fock 空間}) \tag{8.6}$$

今令

$$\mathscr{H}_n=\mathscr{T}^{-1}\mathbf{F}_n, \qquad n\geq 0.$$

則空間$\mathscr{H}_n$不外就是第4.2節所引入的n次多重Wiener 積分，並且相應於(8.6)式的$\mathbf{F}$之分解就是(L^2)的分解：

$$(L^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\mathscr{H}_n. \tag{8.7}$$

【命題 8.2】

1. 對於$\varphi(x)\in\mathscr{H}_n$，我們有

$$(\mathscr{T}\varphi)(\xi)=i^nC(\xi)\int\cdots\int_{\mathbf{R}^n}F(u_1,\ldots,u_n)\xi(u_1)\cdots\xi(u_n)\,du_1\cdots du_n, \tag{8.8}$$

其中$F\in\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$，而$\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$表示對稱的$L^2(\mathbf{R}^n)$函數類；並且映射

$$\varphi\to F\in\hat{L}^2(\mathbf{R}^n), \qquad \varphi\in\mathscr{H}_n,$$

是嵌射的。

2. 在1.所建立的關係之下，我們有

$$\|\varphi\|_{(L^2)} = \sqrt{n!}\,\|F\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \tag{8.9}$$

【定義 8.1】

(8.8) 式稱爲 $\varphi \in \mathscr{H}_n$ 的**積分表現**，而 F 稱爲表現的核。

對於一般的 $\varphi \in (L^2)$，我們利用展式

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n, \qquad \varphi_n \in \mathscr{H}_n,$$

因而得到**積分表現**的級數及核 $\{F_n\}$。

我們回想一下第 4.6 節 [1]，我們特別有興趣於 $\varphi \in \mathscr{H}_2$ 的情形。對於每個這種 φ 都對應有一個對稱函數 $F(u, v) \in \hat{L}^2(\mathbf{R}^2)$，並且若再假設 φ 是實值的，則 F 就在 $L^2(\mathbf{R})$ 上決定出一個自伴 Hilbert - Schmidt 算子。因此我們就可以利用 Hilbert - Schmidt 算子論得到 F 的固有函數展式

$$F(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \eta_n(u) \eta_n(v),$$

其中 $\{\lambda_n, \eta_n : n \geq 1\}$ 分別爲由固有值與固有向量所組成。由此就可將 φ 展成一列隨機變數之和：

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} (\langle x, \eta_n \rangle^2 - 1).$$

這個展式一經得到，再計算其特徵泛函或其累積量（cumulants），就可以很容易求得 φ 的機率分佈，從而導致推廣的二次泛函〔參見下面 (8.16) 式〕。

8.2 $(\mathscr{S}^*, \mu)$ 中的坐標系

其次我們討論 $\mathscr{S}^*$ 中的座標系以及 Hilbert 空間 (L^2) 的基底，在到達這個領域的主題之前，我們複習一些從 $L^2([0, 1])$ 中取出的古典分析之基本概念〔參見 P. Lévy (1951)〕。

令 $\{\xi_n\}$ 爲 $L^2([0,1])$ 中的一組完備么正系統，並且定義 Ψ_n，Φ_n 如下：

$$\Psi_n(u, v) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \xi_m(u)\xi_m(v),$$

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \xi_m(u)^2.$$

我們立刻看出

$$\int_0^1\int_0^1 \Psi_n(u, v)^2\, du\, dv = \frac{1}{n} \to 0, \qquad \text{當 } n \to \infty, \tag{8.10}$$

亦即 Ψ_n 在 $L^2([0,1]\times[0,1])$ 中收斂到 0。至於 $\Phi_n(u)$，我們有

$$\int_0^1 \Phi_n(u)\, du = 1, \qquad n \geq 1,$$

但是在 $L^2([0,1])$ 中的收斂

$$\Phi_n(u) \to 1 \tag{8.11}$$

不恒成立。當(8.11)式成立時，我們就稱完備么正系統 $\{\xi_n\}$ 爲均等稠密(equally dense)。

[例1]

下面兩個系統都是均等稠密系統：

1. $\{1, \sqrt{2}\sin 2k\pi t, \sqrt{2}\cos 2k\pi t : k \geq 1\}$。
2. Walsh 函數。

[註解] 我們也可以考慮 $L^2(\mathbf{R})$中的均等稠密之完備么正系統這個概念。(8.11)式的類似性質必然是在適當意味下，Φ_n的行爲就如 $\mathbf{R}$ 上的均勻機率測度的密度。這種系統的一個例子如下：

$$\xi_n(u) = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(u)\exp(-\tfrac{1}{2}u^2), \qquad n \geq 0. \tag{8.12}$$

其中$H_n(u)$是次數爲n之Hermite多項式。

現在我們來探討$\mathscr{S}^*$的座標系。

I. 設$\{\xi_n\}$爲$L^2(\mathbf{R})$中一組完備么正系統。每個$x\in\mathscr{S}^*$都有如下形之座標表現：

$$x \sim \{x_n : n \geq 1\}, \qquad x_n = \langle x, \xi_n \rangle.$$

進一步，如果在$\mathscr{S}^*$上引入測度μ，則$\{<x, \xi_n>\}$構成了機率空間$(\mathscr{S}^*, \mu)$上的一組獨立的標準Gauss型隨機變數。因此由大數法則，我們有

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle x, \xi_n\rangle\langle y, \xi_n\rangle \to 0, \quad \text{殆遍於 } (\mathscr{S}^* \times \mathscr{S}^*, \mu \times \mu) \text{ 上}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\langle x, \xi_n\rangle^2 \to 1, \quad \text{殆遍於 } (\mathscr{S}^*, \mu) \text{ 上，當} N\to\infty$$

這些觀察顯示，完備么正系統$\{<x, \xi_n>\}$在Hilbert空間$\mathscr{H}_1$中具有"均等稠密"的性質。

如前述，我們自然也得到$\mathscr{H}$中的完備么正系統，透過Fourier-Hermite多項式定義如下：

$$\prod_j (n_j!\,2^{n_j})^{-1/2} H_{n_j}\!\left(\frac{\langle x, \xi_j\rangle}{\sqrt{2}}\right), \qquad \sum_j n_j = n. \tag{8.13}$$

不幸的是這個系統不適用於因果微積分，因爲它不能很容易了解到時間的推移。

II. 爲了鞏固我們的觀念，取單位區間$[0, 1]$，令$\{\pi_n : n \geq 1\}$爲$[0, 1]$的一列分割，使得對每個n，π_{n+1}是π_n的加細分割，記爲$\pi_n < \pi_{n+1}$。如果$\pi = \{\Delta_i\}$，$\Delta_i = [t_i, t_{i+1}]$，則如第2.2節[2]所述，我們可以定義一個函數$f(t)$，$0 \leq t \leq 1$，在$\pi$上的二次變差爲：

$$\pi^2 f = \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2.$$

令$W(t, x)$爲Brown運動的一個樣板（version），定義爲

$$W(t, x) = \langle x, \chi_{[0, t]} \rangle, \qquad 0 \le t \le 1.$$

則我們有

【補題】

如果 $\delta\pi_n = \max|t_{j+1} - t_j| \to 0$，則

$$\lim_{n \to \infty} \pi_n^2 W(\cdot, x) = 1, \qquad \text{a.e. } (\mu).$$

這個補題的證明請參閱第2.2節定理2.3之推論。特別地，若 π_n 爲等分割，且 $|\Delta_k| = 2^{-n}$，則

$$\sum_{k=1}^{2^n} (\Delta_k W)^2 = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} (2^{n/2} \Delta_k W)^2 \to 1 \quad \text{a.e. } (\mu).$$

形式地說，這就是斷言 $\{(dt)^{-1/2} dW(t)\}$ 爲 $\mathscr{H}_1$ 中之均等稠密的完備么正系統。更明確地說，投影系統

$$\{|\Delta_k|^{-1/2} \Delta_k W : \Delta_k \in \pi_n\}, \qquad \pi_n \text{ 等分割}, n = 1, 2, \ldots,$$

定義出一個完備么正系統，而且又具有均等稠密性。

其次我們探求 $\mathscr{H}_2$ 中的一組完備么正系統。利用Fourier - Hermite多項式，所有系統中的元素皆被分類如下：

$$\begin{array}{lll} (dt)^{-1/2} dW(t) \cdot (ds)^{-1/2} dW(s) & (t \ne s) & \text{類(1)} \\ 2^{-1/2}[((dt)^{-1/2} dW(t))^2 - 1] & & \text{類(2)} \end{array}$$

如果我們利用下面具參數之Hermite多項式

$$H_n(x; \sigma^2) = \left[\frac{(-\sigma^2)^n}{n!}\right] \exp\left[\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \frac{d^n}{dx^n} \exp\left[\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right], \qquad n \ge 0,$$

其中 $\sigma > 0$，則很容易得到 $\mathscr{H}_n$ 的一組完備么正系統，$n \ge 0$，如下形：

$$\prod_{j=1}^{n}\left\{H_1\left(\dot W(t_j);\ \frac{1}{dt_j}\right)\sqrt{dt_j}\right\},\qquad (t_j\ \text{相異})\qquad \text{類(1)}$$

$$\prod_{j}\left\{c_{n_j}H_{n_j}\left(\dot W(t_j);\ \frac{1}{dt_j}\right)(\sqrt{dt_j})^{n_j}\right\},\qquad \sum_j n_j = n,\qquad \text{類(2)} \tag{8.14}$$

其中在第二表式中 t_j 相異且 $c_{n_j}=(n_j!)^{-1/2}$ 。這些表式仍然是純形式的，但是我們注意到，由 $H_n(x;\sigma^2)$ 的加法公式：

$$\sum_{k=0}^{n} H_{n-k}(x;\sigma^2)H_k(y;\tau^2)=H_n(x+y,\sigma^2+\tau^2);$$

可知它們跟分割 π_n 是一致的，上述加法公式請參閱第A.5節之公式(A.36)式。

8.3 廣義的Brown泛函

首先我們考慮一個例子，由此暗示我們如何定義一類廣義的 Brown 泛函。如果我們令

$$W(t)=W(t,x)=\langle x,\chi_{[t\wedge 0,\,t\vee 0]}\rangle,$$

則 $\{W(t)\}$ 爲Brown 運動的一個樣板(version)。記住(8.14)式類(2)(取 $n=2$ 的情形)，使我們考慮 $\mathscr{H}_2$ 中如下形的泛函：

$$\varphi_\pi=\sum_j a_j 2^{-1/2}\{(|\Delta_j|^{-1/2}\Delta_j W)^2-1\},\qquad \pi=\{\Delta_j\}\ \text{爲}\ \mathbf{R}\ \text{的一個分割}$$

它的積分表現爲

$$(\mathscr{T}\varphi_\pi)(\xi)=i^2C(\xi)2^{-1/2}\iint\sum_j|\Delta_j|^{-1}a_j\chi_{\Delta_j^2}(u,v)\xi(u)\xi(v)\,du\,dv.$$

如果分割 $\pi=\{\Delta_j\}$ 逐漸加細，使得 $\delta\pi\to 0$ ，且 $\sum_j a_j\chi_{\Delta_j}(u)$ 趨近於一個函數 f ，則積分表現趨近於

$$i^2C(\xi)2^{-1/2}\int f(u)\xi(u)^2\,du. \tag{8.15}$$

這個表式可以永遠不屬於 $\mathscr{F}_2$ ，但是若我們將它記成

$$i^2C(\xi)2^{-1/2}\iint f\left(\tfrac{1}{2}(u+v)\right)\delta(u-v)\xi(u)\xi(v)\,du\,dv,$$

則使我們想到了比 $\mathscr{F}_2$ 更廣泛的一類泛函。同時我們考慮當 $\delta\pi\to 0$ 時，φ_π 的極值，在某意味之下，而不在（L^2）意味之下。形式地說，這個極限必然表成下形

$$\sqrt{2}\int f(u)H_2\left(\dot{W}(u);\ \frac{1}{du}\right)du, \tag{8.16}$$

並且其積分表現給如（8.15）式。

現在我們就可以來定義廣義的Brown泛函了。設 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的 m 階Sobolev空間，再令 $\hat{H}^m(\mathbf{R}^n)=H^m(\mathbf{R}^n)\cap\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$，則定義 $\mathscr{F}_n^{(n)}$ 為

$$\left\{U(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}\cdots\int F(u_1,\cdots,u_n)\xi(u_1)\cdots\xi(u_n)\,du_1\cdots du_n : F\in\hat{H}^{(n+1)/2}(\mathbf{R}^n)\right\},$$

並且

$$\mathbf{F}_n^{(n)}=\{i^nC(\xi)U(\xi) : U\in\mathscr{F}_n^{(n)}\},$$

作為 $H^{(n+1)/2}(\mathbf{R}^n)$ 的子集，對 $\mathscr{F}_n^{(n)}$ 來引入位相；亦即若 $U(\xi)\in\mathscr{F}_n^{(n)}$ 且具有核 F，則泛函的範數定義為 $(n!)^{-1/2}$ 乘以 F 的 $H^{(n+1)/2}(\mathbf{R}^n)$ 範數〔參見命題8.2(2)〕。令

$$\mathscr{H}_n^{(n)}=\mathscr{F}^{-1}(\mathbf{F}_n^{(n)}),$$

並且將 $\mathscr{H}_n^{(n)}$ 位相化使得 $\mathscr{F}$ 變成一個保距映射。令 $\mathscr{H}_n^{(-n)}$ 與 $\mathscr{F}_n^{(-n)}$ 分別為 $\mathscr{H}_n^{(n)}$ 與 $\mathscr{F}_n^{(n)}$ 的偶件空間，則我們有下圖：

$$\begin{array}{ccccc}\mathscr{F}_n^{(n)} & \hookrightarrow & \mathscr{F}_n & \hookrightarrow & \mathscr{F}_n^{(-n)}\\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow\\ \mathscr{H}_n^{(n)} & \hookrightarrow & \mathscr{H}_n & \hookrightarrow & \mathscr{H}_n^{(-n)}.\end{array}$$

其中$\hookrightarrow$表示連續的嵌入，並且$\updownarrow$表示在$\mathscr{T}$之下的同構（$\mathscr{T}$自然地推廣到$\mathscr{H}_n^{(-n)}$上）。

【定義 8.2】

$\mathscr{H}_n^{(-n)}$的一個元素稱爲n次的**廣義**Brown**泛函**。

8.4　廣義的隨機測度

我們很容易看出，下面的表式是$\mathscr{F}_n^{(-n)}$中的一個泛函：

$$\int \cdots \int f(u_1, \ldots, u_k)\xi(u_1)^{n_1} \cdots \xi(u_k)^{n_k}\, du_1 \cdots du_k, \qquad \sum_j n_j = n \tag{8.17}$$

我們期望（8.15）式與（8.16）式的關係可以推廣到（8.15）式改成（8.17）式的情形亦成立。今由一個$\mathscr{H}_n$泛函著手：

$$\varphi_\pi = \sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1, \ldots, i_k} \prod_j \left\{ n_j! |\Delta_{i_j}| H_{n_j}\left(|\Delta_{i_j}|^{-1} \Delta_{i_j} B;\ \frac{1}{|\Delta_{i_j}|}\right)\right\},$$

其中i_1，……，i_k皆相異並且$\pi = \{\Delta_i\}$爲$\mathbf{R}$的有限分割。如果（8.17）式中的函數$f(u_1, \cdots\cdots, u_k)$由下式

$$\sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1, \ldots, i_k} \prod_j \chi \Delta_{i_j}^{n_j} / |\Delta_{i_j}|^{n_j - 1},$$

來逼近，則可以證明，在空間$\mathscr{F}_n^{(-n)}$中，φ_π的積分表現趨近於（8.17）式之泛函。

記住最後這個結果，我們進一步引入一些記號。記

$$M_n(dt) = H_n\left(\dot{W}(t);\ \frac{1}{dt}\right) dt,$$

並且

$$\prod_{j=1}^{k} \cdot M_{n_j}(dt_j) \equiv M_{n_1}(dt_1) \cdot \cdots \cdot M_{n_j}(dt_k)$$

$$= \begin{cases} \prod_{j=1}^{k} M_{n_j}(dt_j), & \text{若 } t_1, \cdots\cdots, t_k \text{ 皆相異} \\ 0 & \text{，否則。} \end{cases} \tag{8.18}$$

當然要嚴格定義乘積Π，必須如第 8.2 節之定義 π 一樣，利用具有 $\delta\pi_n \to 0$ 的$\mathbf{R}$ 之一序列分割 $\{\pi_n\}$。在這個記號下，上述的結果可以綜述成如下：

【定理 8.1】

乘積$\prod_{j=1}^{k} \cdot M_{n_j}(dt_j)$，$\sum_j n_j = n$，爲一個隨機測度，並且相對於它的積分屬於 $\mathscr{H}_n^{(n)}$。進一步，我們有

$$\mathscr{T}\left(\prod_{j=1}^{k} \cdot M_{n_j}(dt_j)\right) = \prod_{j=1}^{k} (n_j!)^{-1} \delta_u^{n_j} du^{n_j}, \tag{8.19}$$

其中 $\delta_u^n du^n$ 爲給如下之測度：

$$\int \cdots \int_{\mathbf{R}^n} f(u_1, \ldots, u_n) \, \delta_u^n \, du^n = \int f(u, \ldots, u) \, du.$$

【定義 8.3】

由（8.18）式所定義的測度稱爲廣義的隨機測度。

相對於形如（8.18）式之廣義隨機測度的積分，可以記號地寫成：

$$\int \cdots \int_{\mathbf{R}^k} f(u_1, \ldots, u_k) M_{n_1}(du_1) \cdot \cdots \cdot M_{n_k}(du_k).$$

對於廣義隨機測度的乘積，暫時只能對特殊情形來定義。乘以$M_1(dt)$的操作是可能的，如下：

$$M_n(dt) \cdot M_1(ds) = M_n(dt) \cdot M_1(ds) + \delta_{t-s} M_{n-1}(dt),$$

$$\left(\prod_{j=1}^{k} \cdot M_{n_j}(dt_j)\right) \cdot M_1(ds) = \sum_{j=1}^{k} \left\{M_{n_j}(dt_j) M_1(ds) \prod_{l \neq j} \cdot M_{n_l}(dt_l)\right\}.$$

例如，

$$\int f(u)M_n(du)\cdot\int g(v)M_1(dv)$$

$$=\iint (f\otimes g)(u,v)M_n(du)\cdot M_1(dv)+\int f(u)g(u)M_{n-1}(du).$$

其中⊗表示張量積。底下我們給出三個註解。

［註解 1］ 相對於廣義隨機測度的積分不可以想成是定積分，而必須看成有限多變數之多項式的連續類推。這種解釋建立在第 8.2 節的討論上面。

［註解 2］ 空間 $\mathscr{H}_n$ 恰好等於相對於隨機測度 $M_1(du_1),\cdots\cdots,M_1(du_n)$ 之積分全體。

［註解 3］ 相對於（8.18）式的隨機測度（但 $\sum_j n_j=n$）之積分無法窮盡空間 $\mathscr{H}_n^{(-n)}$。下一節我們將舉出 $\mathscr{H}_n^{(-n)}$ 的一個元素，不能表成如此之積分的例子。P. Lévy 的用語是這樣的：$\mathscr{F}_n$ 中的一個泛函稱為**正則泛函**（regular functional），而一個 $U(\xi)$ 使得 $i^nC(\xi)U(\xi)$ 可以表成（8.17）式之形者就叫做一個**正規泛函**（normal functional）。

8.5 Brown 微積算法

所謂"Brown 微積算法"是指由 Brown 運動所引起的微分與積分，以及相關的操作，但在計算與公式裡明顯地介入時間因素。第 8.2 節所引入的關於基本空間的完備么正系就是最適合於此種微積演算的。利用這個基底及廣義隨機測度的概念，我們已經討論過

I. 積分學

第二個論題就是

II. 微分學

我們對導微操作 $\partial/\partial\dot{W}(t)$ 深感興趣，這個操作的明確意思將給於下面。

類推於 $\mathscr{F}_n$，我們可以定義一個泛函空間 $\mathscr{F}_n^{(n)}$，並且賦予位相構造，

使得 $\mathscr{F}_n^{(n)}$ 同構於 $\mathbf{F}_n^{(n)}$。同理也可以辦得到 $\mathscr{F}_n^{(n)} \cong \mathbf{F}_n^{(-n)}$。如果 $\varphi \in \mathscr{H}_n^{(n)}$，則可以在 $\mathscr{F}_n^{(n)}$ 中找到 $U(\xi)$ 使得 $(\mathscr{T}\varphi)(\xi) = i^n C(\xi)U(\xi)$。$U(\xi)$ 的 Fréchet 意味之泛函導微恒存在，且屬於 $\mathscr{F}_{n-1}^{(n-1)}$，對所有 t，記之爲 $U'_\xi(\xi;t)$。應用映射 $\mathscr{T}^{-1}$，我們得到一個 $\mathscr{H}_{n-1}^{(n-1)}$ 泛函，記爲 $\varphi'(t, x)$：

$$\mathscr{T}(i^{n-1}C(\xi)U'_\xi(\xi;t))(x) = \varphi'(t, x),$$

並且映射 $\varphi(x) \to \varphi'(t, x)$ 記爲

$$\left|\frac{\partial}{\partial \dot{W}(t)}\right|\varphi(x) = \varphi'(t, x). \tag{8.20}$$

這是導微操作，事實上是一個Brown 泛函 φ 對 $\dot{W}(t)$ 的導微。

更高階的導微如 $\partial^2/\partial\dot{W}(t)^2$，$\partial^2/\partial\dot{W}(t)\partial\dot{W}(s)$ 也可以利用二階泛函導微來定義。我們展示於下：

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_n^{(n)} &\leftrightarrow \mathscr{F}_n^{(n)} \\ \frac{\partial^2}{\partial \dot{B}(t)^2} &\leftrightarrow U''_{\xi^2}(\xi;t) \\ \frac{\partial^2}{\partial \dot{B}(t)\,\partial \dot{B}(s)} &\leftrightarrow U''_{\xi\eta}(\xi;t,a) \end{aligned} \tag{8.21}$$

泛函 U 的二階導微 U_{ξ^2} 與 $U_{\xi\eta}$ 由下面 1. 與 2. 兩個步驟來決定：

1. 當 ζ 變化 $\delta\zeta$ 時，變分 δU 爲一個泛函，滿足

(a) δU 對 $\delta\zeta$ 是線性的，並且

(b) $U(\zeta + \delta\zeta) - U(\zeta) = \delta U + 0(\delta\zeta)$。

泛函導微由下式決定：

2. 二階變分 $\delta^2 U$ 爲滿足下述條件的函數：

(a) $\delta^2 U$ 爲 $\delta\zeta$ 的二次式，並且

(b) $U(\xi + \delta\xi) - U(\xi) = \delta U + \frac{1}{2}\delta^2 U + o(\delta\xi)^2.$

泛函導微 $U_{\xi_1}(\zeta ; t)$ 與 $U_{\xi_\eta}(\zeta ; t, s)$ 由下面公式決定：

$$\delta U'_{\zeta}(t) = U''_{\xi_1}(\xi; t)\, \delta\xi(t) + \int U''_{\xi_\eta}(\xi; t, s)\, \delta\xi(s)\, ds.$$

$\mathscr{H}_n^{(-n)}$ 上的無限維 Laplace 算子 Δ 現在可以定義爲：

$$\Delta = \int \left[\frac{\partial^2}{\partial \dot{B}(t)^2}\right] dt. \tag{8.22}$$

其定義域 $\mathscr{D}(\Delta) = \mathscr{T}^{-1}\{i^n C(\xi) U(\xi)$: U''_{ξ_1}, U''_{ξ_η} 存在, $U''_{\xi_1}(\xi; t)$ 對 t 可積分 $\}$

我們可以將 Δ 的定義延拓至 $\sum_n \mathscr{H}_n^{(-n)}$ 的某適當子集上。

【例 2 】

(1) 令 $\varphi_t(x) = \exp[W(t) - \frac{1}{2}t]$，我們發現到

$$\frac{\partial}{\partial \dot{W}(s)} \varphi_t = \begin{cases} \varphi_t & 0 < s < t; \\ 0 & s > t. \end{cases}$$

(2) $\{\partial/\partial \dot{W}(s)\} H_n(W(t); t) = H_{n-1}(W(t); t), \qquad s \le t.$

(3) 設 $\varphi \equiv \int f(u) M_2(du)$，則有

$$\frac{\partial}{\partial \dot{W}(t)} \varphi = f(t)\dot{W}(t), \frac{\partial^2}{\partial \dot{W}(t)^2} \varphi = f(t);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \dot{W}(t)\, \partial \dot{W}(s)} \varphi = 0, \qquad \Delta\varphi = \int f(t)\, dt.$$

【定義 8.4 】

如果 $\varphi \in \mathscr{D}(\Delta)$ 且

$$\Delta\varphi = 0.$$

則稱泛函 φ 是**調和的**（harmonic）。

【定理 8.2 】

H_n 中的每個泛函（$n \geq 0$）皆是調和的。

III. 乘以 $\dot{W}(t)$ 的操作

因爲 $\{e^{i\langle x, \eta\rangle}: \eta \in \mathscr{S}\}$ 生成了整個 (L^2)，於是我們由 $\dot{W}(t) e^{i\langle x, \eta\rangle}$ 出發。這可由

$$\langle x, |\Delta|^{-1}\chi_\Delta\rangle e^{i\langle x,\eta\rangle},$$

來逼近。應用$\mathscr{T}$到這個逼近項，得到

$$iC(\xi)(\xi+\eta, |\Delta|^{-1}\chi_\Delta)\exp[-\tfrac{1}{2}\|\eta\|^2-(\xi,\eta)],$$

並且當$\Delta\to\{t\}$時，這趨近於

$$iC(\xi)(\xi(t)+\eta(t))\exp[-\tfrac{1}{2}\|\eta\|^2-(\xi,\eta)].$$

這使我們可以證明：若$\|\eta\|=1$，則

$$\mathscr{T}\left(\dot{W}(t)H_n\left(\frac{\langle x,\eta\rangle}{\sqrt{2}}\right)\right)(\xi)=i^{n+1}2^{n/2}[\xi(t)(\xi,\eta)^n+n\eta(t)(\xi,\eta)^{n-1}]C(\xi). \tag{8.23}$$

這表示，當$\|\eta\|=1$時，$\dot{W}(t)H_n(\langle x,\eta\rangle/\sqrt{2})$屬於$\mathscr{H}_{n+1}^{(-n-1)}+\mathscr{H}_{n-1}$並且其相應的核爲

$$2^{n/2}\{\widehat{\eta^{n\otimes}\otimes\delta_t}-n\eta(t)\eta^{(n-1)\otimes}\},\quad \wedge \text{ 表示對稱化操作}$$

因此我們可以證明下面定理。

【定理8.3】

$\mathscr{H}_n^{(n)}$中的泛函可以乘以$\dot{W}(t)$，所得的乘積落在$\mathscr{H}_{n+1}^{(-n-1)}+\mathscr{H}_{n-1}$之中。

IV. Fourier 變換

爲了展示需要對廣義的Brown泛函空間考慮Fourier 變換，我們來考察至今所遇到的三個變換，每一個都在某方面看起來像Fourier 變換。雖然它們每一個都不適合於Brown 微積演算，但是研究它們也許能夠幫忙我們尋求一個理想的這種變換。

(a) 變換$\mathscr{T}$，這定義於第 4.3節，如下：

$$(\mathscr{T}\varphi)(\xi)=\int\exp[i\langle x,\xi\rangle]\,\varphi(x)\,d\mu(x).$$

它看起來像一個Fourier 變換，但是它將$\varphi(x)$變換成E上的一個泛函，

而不是 E^* 上的一個泛函。除此之外，它在我們的理論中所扮演的重要角色是無需再作強調的。

(b)　Fourier-Wiener 變換。這定義於第 4.7 節，如下：

$$\Im(y)=\int\varphi(\sqrt{2}x+iy)\,d\mu(x),\qquad \varphi\in(L^2),$$

並且滿足

$$\Im(y)=i^n\varphi(y),\qquad \varphi\in\mathscr{H}_n.$$

這是 (L^2) 上非常漂亮的一個變換，但也不適合於Brown微積演算。

(c)　另一種Fourier 變換。由 $\varphi\in\mathscr{H}_n$ 出發，令 $F\in\hat{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 爲相應於 φ 之核。記 F 的平常 Fourier 變換爲 $\hat{F}$，我們可以找到 $\mathscr{H}_n$ 的一個元素 $\hat{\varphi}$ 使得 $\hat{F}$ 就是相應的核，並且我們看出變換 $\varphi\to\hat{\varphi}$ 是單值的。

在Brown微積算法中，我們心目中所需要的"Fourier 變換"是將操作 $\partial/\partial\dot{W}(t)$ 變成乘以 $i\dot{W}(t)$ 之操作，反之亦然。尋找這樣一個Fourier 變換並且建立適當的調性分析是一個非常有趣的未解決問題。值得注意的是，廣義泛函 $\exp[i\int\dot{W}(t)^2dt]$ 在適當的修飾下，對於我們的解析工作扮演了一個基本而重要的角色。〔參見L. Streit 及T. Hida (1979)〕

附　　錄

A.1　平賭過程（Martingales）

本節我們要來解說本書常用的有關平賭過程的基本不等式與極限定理。對於這些結果作直觀研究的是 P.Lévy（1937，第VIII章），作有系統研究的是 J.L.Doob，尤其是他在1953年出版的書中討論得非常詳細。

[1]　離散參數的平賭過程

雖然在第2.2節我們已經介紹過這個概念，爲了方便起見我們還是重複敍述一下它的定義。令 $\{X_n(\omega): n\in I\}$ 爲定義在機率空間 $(\Omega, \mathbf{B}, P)$ 上的一個隨機過程，並且取時軸 I 爲下列之一：整數集 $\mathbf{Z}$，正整數集 $\mathbf{N}$，負整數集 $\mathbf{Z}^-$（這些集有時候含有 $+\infty$ 或 $-\infty$），或 $\mathbf{Z}$ 的一些接續整數所成的子集。再給定一族遞增的 σ 環 $\{\mathbf{B}_n: n\in I\}$，每個 $\mathbf{B}_n$ 皆爲 $\mathbf{B}$ 的子 σ 環，亦即：

$$\mathbf{B}_n \subseteq \mathbf{B}, \qquad n\in I,$$
$$\mathbf{B}_n \subseteq \mathbf{B}_{n+1}, \qquad n, n+1\in I.$$

【定義A.1】

如果 $\{X_n, \mathbf{B}_n: n\in I\}$ 對任意 $n\in I$ 滿足下列三個條件：

(a)　X_n 爲 $\mathbf{B}_n$ 可測，記爲 $X_n \hookrightarrow \mathbf{B}_n$；

(b)　$E(|X_n|) < \infty$；

(c)　$E(X_m|\mathbf{B}_n) = X_n$，殆遍，對所有 $m > n$；

則稱 $\{X_n, \mathbf{B}_n: n\in I\}$ 爲一個**平賭過程**。在上述中，若(a)與(b)保持不變，但(c)改成：

(c) $E(X_m|\mathbf{B}_n)\geq X_n$ ，殆遍，對所有 $m>n$ ；

則稱 $\{X_n,\mathbf{B}_n:n\in I\}$ 為一個劣賭過程（submartingale）。如果 $\{-X_n,\mathbf{B}_n:n\in I\}$ 為一個劣賭過程，則稱 $\{X_n,\mathbf{B}_n:n\in I\}$ 為一個**勝賭過程**（supermartingale）。

[註解] 所謂"平"、"劣"、"勝"的用法可以這樣看：X_n 表示第 n 局後莊家的賭資，站在賭客的立場來看莊家的賭資，這就產生了"平賭"、"劣賭"、"勝賭"諸概念。

為了記號上書寫方便起見，我們常將 $\{X_n,\mathbf{B}_n:n\in I\}$ 簡記成 $\{X_n:n\in I\}$ 或再簡記成 $\{X_n\}$。這只要 $\{\mathbf{B}_n\}$ 與 I 由上下文可以清楚知道，就不會產生混淆了。

如果 $\{X_n,\mathbf{B}_n:n\in I\}$ 為一個平賭過程，則對任意 $m,n\in I$，$m>n$，我們有 $E(X_m)=E(E(X_m|\mathbf{B}_n))=E(X_n)$，故 $E(X_n)$ 為 n 的常函數。同理，若 $\{X_n\}$ 為一劣賭，則 $E(X_n)$ 為 n 的非遞降函數。

【命題A.1】

設 $\Phi(x)$ 為 $\mathbf{R}$ 上的一個連續的凸函數。如果 $\{X_n,\mathbf{B}_n:n\in I\}$ 為一個平賭過程，並且對某 $n_0\in I$，$\Phi(X_{n_0})$ 是可積分的，則 $\{\Phi(X_n),\mathbf{B}_n:n\in I,n\leq n_0\}$ 為一個劣賭過程。

[證明] 顯然 $\{\Phi(X_n)\}$ 滿足定義A.1的條件(a)。當 $n\leq n_0$ 時，利用 Jensen 不等式可推得

$$\Phi(X_n)=\Phi(E(X_{n_0}|\mathbf{B}_n))\leq E(\Phi(X_{n_0})|\mathbf{B}_n),\qquad \text{a.e.} \tag{A.1}$$

今 $\Phi(X_n)$ 為 $\mathbf{B}_n$ 可測，而且我們已證明了它可被一個可積分 $\mathbf{B}_n$ 可測函數從上方罩住。另一方面，如所周知，對於凸函數 Φ，存在一個正的常數 c 使得 $\Phi(x)\geq cx+a$ 對所有負的 x 皆成立，因此我們看出 $\Phi(X_n)$ 從下方被可積分函數 cX_n+a 罩住。從而 $\Phi(X_n)$ 是可積分的，於是定義A.1的條件(b)成立。

最後我們注意到，仿上述(A.1)式的證明可推得

$\Phi(X_n) \leq E(\Phi(X_n) \mid \mathbf{B}_n)$，$\forall\, n < m \leq n_0$，因此條件(c)′ 亦成立，從而整個定義A.1皆滿足。 #

【例1】

如果 $\{X_n\}$ 爲一個平賭過程，且 $\alpha \geq 1$，則 $\{|X_n|^\alpha\}$ 爲一個劣賭過程。

【例2】

如果記 $X_n^+ = X_n > 0$，則當 $\{X_n\}$ 爲一個平賭過程時，$\{X_n^+\}$ 爲一個劣賭過程。

[推論] 設 $\{X_n, \mathbf{B}_n : n \in I\}$ 爲一個平賭過程，則有不等式

$$E(|X_n|) \leq E(|X_{n+1}|), \qquad n, n+1 \in I.$$

下面介紹Doob的基本不等式，這是獨立隨機變數列的Kolmogorov不等式推廣到劣賭過程的情形（參見第1.5節補題1.3）。

【定理A.1】

設 $\{X_n, \mathbf{B}_n : n \in I\}$ 爲一個劣賭過程，則對於任意 $\lambda > 0$ 我們有不等式

$$P\left(\max_{k \leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \lambda^{-1} E(X_n^+). \tag{A.2}$$

[證明] 令 B_k 表示 X_j 首次在時刻 k 到達 λ 的事件，亦即：

$$B_k = \bigcap_{j<k} (X_j < \lambda) \cap (X_k \geq \lambda).$$

每個事件 B_k 皆爲 σ 環 $\mathbf{B}_k$，$k \leq n$ 中的元素，它們形成互斥事件。今 $B = \bigcup_{k \leq n} B_k$，我們注意到 $P(B) = P(\max_{k \leq n} X_k \geq \lambda)$ 且

$$\begin{aligned} E(X_n^+) &\geq \int_B X_n^+ \, dP = \sum_{k \leq n} \int_{B_k} E(X_n^+ \mid \mathbf{B}_k) \, dP \\ &\geq \sum_{k \leq n} \int_{B_k} X_k^+ \, dP \\ &\geq \lambda \sum_{k \leq n} P(B_k) = \lambda P(B). \end{aligned}$$

由此得到（A.2）之不等式。 #

由這個定理與命題A.1就得到下面的斷言：

［推論］ 設$\{X_n : 1 \le n \le N\}$為一個平賭過程滿足$E(X_N^2) < \infty$，則$\{X_n^2 : 1 \le n \le N\}$為一個劣賭過程，並且對$\lambda > 0$我們有不等式

$$P\left(\max_{1 \le n \le N} X_n^2 \ge \lambda\right) \le \lambda^{-1} E(X_N^2).$$

令$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_N$為實數並且令$[r_1, r_2]$為一區間。數列$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_N$對區間$[r_1, r_2]$的上穿次數〔見J.L. Doob（1953），第VII章〕定義為數列a_i，$1 \le i \le N$，由r_1的下方超過r_2的次數。

【命題A.2】

設$\{X_n(\omega) : 1 \le n \le N\}$為一劣賭過程，並且令$\beta(\omega)$為樣本序列$X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots\cdots, X_N(\omega)$對$[r_1, r_2]$的上穿次數，則我們有不等式

$$E(\beta) \le (r_2 - r_1)^{-1}[E(|X_N|) + |r_1|]. \tag{A.3}$$

［證明］ 首先假定所有$X_k \ge 0$且$r_1 = 0$，對於每個$\omega \in \Omega$，定義

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\omega) &= \min\{k : X_k(\omega) \le 0\} \\
\sigma_2(\omega) &= \min\{k : k > \sigma_1(\omega), X_k(\omega) \ge r_2\} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\sigma_{2k-1}(\omega) &= \min\{k : k > \sigma_{2k-2}(\omega), X_k(\omega) \le 0\} \\
\sigma_{2k}(\omega) &= \min\{k : k > \sigma_{2k-1}(\omega), X_k(\omega) \ge r_2\} \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

並且採用一般規 ，若右項為空集，則定義相應的$\sigma_k(\omega) = +\infty$，今令$U_j(\omega)$，$2 \le j \le N$為事件$\bigcup_i (\sigma_{2i} < j \le \sigma_{2i+1}) \cup (j \le \sigma_1)$的示性函

數，再令

$$X = X_1 + \sum_{j=2}^{N} U_j(X_j - X_{j-1}).$$

因爲U_j爲 $\mathbf{B}(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{j-1})$ 可測，由劣賭性得

$$\int_{\{U_j=1\}} (X_j - X_{j-1})\, dP \geq 0.$$

因此

$$E(X) = E(X_1) + \sum_{j=2}^{N} \int_{\{U_j=1\}} (X_j - X_{j-1})\, dP \geq 0.$$

另一方面

$$X(\omega) \leq X_N^+(\omega) - r_2 \beta(\omega),$$

故

$$0 \leq E(X) \leq E(X_N^+) - r_2 E(\beta).$$

由此得證（A.3）在$r_1 = 0$ 的情形。對於一般的r_1，我們令

$$X_n'(\omega) = (X_n(\omega) - r_1) \vee 0.$$

注意到$\{X_n'\}$亦爲一劣賭，其證明完全跟命題A.1類似。今應用上述特例情形到$\{X_n'\}$而得到

$$E(\beta) \leq (r_2 - r_1)^{-1} E(X_N') = (r_2 - r_1)^{-1} \int_{\{X_N \geq r_1\}} (X_N - r_1)\, dP,$$

這就證明了（A.3）。

上述命題是證明下面平賭收斂定理的關鍵工具。

【定理A.2】

設$\{X_n, \mathbf{B}_n : n \in \mathbf{N}^+\}$爲一個平賭過程。如果

$\lim_{n\to\infty} E(|X_n|) = K < \infty$，則極限

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$$

殆遍存在，並且$E(|X_\infty|) \le K$。

［證明］ 令$\lim_{n\to\infty}\sup X_n(\omega) = X^*(\omega)$與$\lim_{n\to\infty}\inf X_n(\omega) = X_*(\omega)$。顯然

$$(X^* - X_* > 0) = \bigcup_{\substack{r_1, r_2 \\ \text{有理數}}} (X^* > r_2 > r_1 > X_*).$$

取兩個有理數$r_1, r_2, r_2 > r_1$。令$\beta_n(\omega)$爲$X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots\cdots, X_n(\omega)$對區間$[r_1, r_2]$的上穿次數，則對任何滿足$X^*(\omega) > r_2 > r_1 > X_*(\omega)$的$\omega$，必有$\beta_n(\omega) \to \infty$當$n \to \infty$。由命題A.2得

$$E(\beta_n) \le (r_2 - r_1)^{-1}[K + |r_1|] < \infty,$$

故在P零測集上$\beta_n \to \infty$。於是$P(X^* > r_2 > r_1 > X_*) = 0$。又因爲$r_1$，$r_2$爲任意有理數，故$X_*(\omega) = X^*(\omega)$殆遍。這個等號可能是$\infty = \infty$，但是由我們的假設可以使用Fatou補題而得知$X_\infty(= X^* = X_*)$殆遍有限，並且

$$E(|X_\infty|) \le \lim_{n\to\infty} E(|X_n|) = K.$$

仿照上述證法，可得下面的結果：

【定理A.2】

如果$\{X_n, \mathcal{B}_n : n \le -1\}$爲一個平賭過程，則

$$\lim_{n\to-\infty} X_n = X_{-\infty}$$

存在且有限（殆遍地）。

［註解］ 定理A.3的假設比定理A.2的假設還要弱得多。

［2］ 連續參數的平賭過程

設 $\{X(t): t \in T\}$ 爲一連續參數的隨機過程，其中 T 爲整條實數軸或 $[0,\infty)$ 或 $(-\infty,0]$ 或 $[a,b]$。令 $\{\mathbf{B}_t\}$ 爲一族遞增的 σ 環。我們完全仿照定義A.1的條件來定義 $\{X(t), \mathbf{B}_t: t \in T\}$ 之爲平賭過程（劣賭過程，或勝賭過程）。在［1］中所建立的定理與命題，通常對連續參數的情形亦成立，但是經常需要多加 $\{X(t)\}$ 爲可列分過程的條件。

【定義A.2*】

設 $\{X(t): t \in T\}$ 爲一隨機過程，如果存在一個可列子集 $S \subset T$ 使得對任意子區間 $(a,b) \subseteq T$ 滿足

$$\sup_{t \in (a,b)} X(t) = \sup_{t \in (a,b) \cap S} X(t), \quad \inf_{t \in (a,b)} X(t) = \inf_{t \in (a,b) \cap S} X(t), \quad \text{a.e.} \tag{A.4}$$

則稱 $\{X(t): t \in T\}$ 爲一可列分過程。

以下我們恒假設 $\{X(t)\}$ 爲一可列分過程。在這個假設下，我們敍述出兩個定理，而不給出證明。

【定理A.4】

設 $\{X(t), \mathbf{B}_t: t \in T\}$ 爲一平賭過程，則對任意 $\lambda > 0$ 與 $t \in T$，我們有不等式

$$P\left(\sup_{u \leq t, u \in T} X(u) \geq \lambda\right) \leq \lambda^{-1} E(X(t)^+). \tag{A.5}$$

特別地，若 $E(X(t)^2) \leq \infty$，則有

$$P\left(\sup_{u \leq t, u \in T} |X(u)| \geq \lambda\right) \leq \lambda^{-2} E(X(t)^2). \tag{A.6}$$

【定理A.5】

設 $\{X(t), \mathbf{B}_t : t \in [0, \infty)\}$為一平賭過程，則下面的極限殆遍存在且有限：

$$\lim_{u \to t-0} X(u), \quad \lim_{u \to t+0} X(u).$$

A.2 具有多維參數之Wiener過程

[1] 定義及一些基本性質

【定義A.3】

設 $\{W(A, \omega) : A \in \mathbf{R}^n\}$ 為由實值隨機變數$W(A, \omega)$ 所成的系統，以 $\mathbf{R}^n$ 為參數空間。如果滿足下面兩個條件：

(a) $W(O, \omega) = 0$ ，殆遍，其中 $0 \in \mathbf{R}^n$ 表 $\mathbf{R}^n$ 的原點；

(b) $\{W(A, \omega) : A \in \mathbf{R}^n\}$ 爲Gauss 型系統，並且$W(A) - W(A')$ 的平均值爲 0 ，變異數爲$d(A, A')$ ，其中 d 表$\mathbf{R}^n$中的距度。

則稱 $\{W(A, \omega) : A \in \mathbf{R}^n\}$ 爲一個 n 維參數的 Brown運動。

在 $n = 1$ 之特別情形，這個定義跟第 2.1 節所給的定義一致，只差第 2.1 節的參數空間爲半線 $[0, \infty)$ 。對於維數 n 不需特別指明的情形，我們就直稱 $W(A)$ 爲具多維參數的Wiener 過程。

令 $R_+^n = \{A = (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n : a_i \geq 0 , \text{A } i\}$。由隨機變數 $W(A, \omega)$ 所成的系統 $\{W(A, \omega) : A \in \mathbf{R}_+^n\}$ ，若滿足定義A.3的(a)與(c)則稱爲一個具有多維參數的Wiener 過程。

(c) $\{W(A, \omega) : A \in \mathbf{R}_+^n\}$ 爲Gauss 型系統，並且$W(A)$ 的平均值爲0,

$$E(W(A)W(A')) = \prod_{j=1}^{n} (a_j \wedge a_j'),$$

其中$A = (a_1, \cdots\cdots, a_n)$ 與$A' = (a_1', \cdots\cdots, a_n')$ 爲$\mathbf{R}_+^n$的任意元素。

爲了避免混淆起見，滿足定義A.3的過程$\{W(A)\}$通常稱爲一個Lévy意味的Brown運動。注意到，$n=1$的情形Wiener過程與Lévy意味的Brown運動是相同的概念，但後者的參數集局限爲$[0,\infty)$。

剛才定義的Brown運動跟本書的主題不太有關連，故其詳細的討論我們省略掉。然而，我們注意到，作爲Gauss過程，當參數在多維空間中變動時，$\{W(A)\}$具有一些有趣而複雜的機率性質。這個Brown運動$\{W(A)\}$必然是未來的研究目標。

爲了對我們所謂的複雜的性質作一，我們提出下面的註解。Brown運動$\{W(A):A\in\mathbf{R}^n\}$在參數空間的繞原點旋轉之下是不變的。在參數的平移之下，我們發現新系統$\{W(A)-W(A_0):A\in\mathbf{R}^n\}$仍然爲一個Brown運動，其中$A_0$固定下來扮演原點的角色。如果$A$局限在通過$A_0$的超平面上變動，則得到一個Brown運動具有較低維的參數空間。特別地，如果A在一直線$l\,(A_0\in l)$上變動，則$\{W(A)-W(A_0):A\in l\}$爲通常意味的Brown運動。

由定義，我們很容易得到

$$E\{W(A)W(A')\}=\frac{1}{2}\{d(A,O)+d(A',O)-d(A,A')\},$$

從而得到

$$\begin{aligned}&E\{(W(A_1)-W(A_1'))(W(A_0)-W(A_0'))\}\\&\qquad=\frac{1}{2}\{d(A_0',A_1)+d(A_0,A_1')-d(A_0,A_1)-d(A_0',A_1')\}.\end{aligned}$$

當A_0與A_0'一經固定下來，由上式我們就可以敍述出一個有趣的性質，即：欲$W(A_1)-W(A_1')$與固定的差$W(A_0)-W(A_0')$互相獨立的充要條件爲A_1與A_1'同時落同一個兩葉旋轉雙曲面的同一葉上，此兩葉旋轉雙曲面以A_0與A_0'爲焦點。這個事實顯示，要獲得一個等價於普通的Brown運動的加性性質是多麼的困難。

一個Brown運動$\{W(t):t>0\}$的射影不變性（參見第2.1節、第5.4節）是很不尋常的事。我們發現Takenaka（1977）曾加以推廣到多參

數的情形。此地我們只注意下面一件事：令 A^* 表 A 相對於 $\mathbf{R}^n$ 的單位球面之反轉點，並且定義

$$W^*(A) = \begin{cases} d(O, A)W(A^*) & A \neq O, \\ 0 & A = O. \end{cases}$$

則 $\{W^*(A) : A \in \mathbf{R}^n\}$ 亦爲一個 n 維參數的Brown運動。

[2] 樣本路徑的性質

如同一維參數的情形，我們也可以討論 n 維參數的Brown運動，其樣本路徑的連續性；特別地，我們可以證明，對殆遍 ω，$W(A, \omega)$ 爲 $A \in \mathbf{R}^n$ 的連續函數。由下面兩個結果也可以推得局部的與均勻的連續性：

$$P\left(\limsup_{A \to O}\{2\, d(O, A)\log\log d(O, A)^{-1}\}^{-1/2}W(A) = 1\right) = 1; \tag{A.7}$$

$$P\left(\lim_{\substack{d(A, A') \to 0 \\ A, A' \in S}} \sup\{2n\, d(A, A')\log d(A, A')^{-1}\}^{-1/2}|W(A) - W(A')| = 1\right) = 1, \tag{A.8}$$

其中 S 爲單位球。

自從P. Lévy（1937）之後，已出現許多辦法來探討有關樣本路徑的連續問題，一個很卓越的，最後的結果由T. Sirao在1960年獲得。

[3] Markov 性

作爲最後的一個論題，我們來討論Lévy意味的Brown運動之Markov性。在研究Brown運動 $\{W(A) : A \in \mathbf{R}^n\}$ 的過程中，P. Lévy猜測：當 n 爲奇數時，它具有Markov 性；但是當 n 爲偶數時無此性質。他的猜測激起了許多有關過程 $M_n(t)$ 的性質以及跟 $M_n(t)$ 有關的單位球面的Dirichlet 問題，此地 $M_n(t)$ 表 $W(A)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中半徑爲 t 的球面之平均值。在這個節骨眼上，我們有興趣的是Markov 性的定義。何種機率性質可作爲多維參數之隨機過程的Markov性？Lévy原先的想法如下：取一個領域 D，具有平滑邊界 ∂D，並且將 $\mathbf{R}^n$分隔成內外兩部分，而且假設當我們知道

$W(A)$的值時，$\{W(A):A\in D\}$與$\{W(A'):A'\in D^c$的內部$\}$互相獨立，其中A屬於∂D的某一近旁。

H. P. McKean (1963) 引入了可分域(splitting field)的概念，利用它定義Markov性，並且證明Lévy猜測成立。他還給出其它有趣的性質，以顯示如何研究一般多參數的Gauss過程。詳細情形請參閱McKean的論文。此地我們只提一下Brown運動與白噪聲的關連。在$n=1$的情形，我們一直利用這樣的事實：一個白噪聲可以看作是Brown運動的時間導微，但是這個簡單關連無法輕易地推廣到$n>1$的情形。事實上，在這個方向上，雖然McKean的論文還引述了其它作者(如Lévy, Chentsov)的一些結果，但仍然有許多未解決的問題。最近S. Takenaka (1977) 發現了多維參數的Brown運動及其相應的白噪聲、射影變換群、相應的Radon變換等等之間的重要關係。

A.3 核式空間的例子

本節我們由核式空間的定義開始說起，這是我們在第3.1節就已使用的一個概念。一個向量空間E，若是由可列多個相容的Hilbert範數$\|\cdot\|_n$，$n\geq 0$，賦予位相，使得相對於這些範數E是完備的，則稱E爲一個具有可列範的Hilbert空間。一個Hilbert範數由內積構造所誘導出來。令E_n爲E相對於第n個範數$\|\cdot\|_n$的完備化，則由定義我們有

$$E=\bigcap_n E_n.$$

因爲諸範數$\|\cdot\|_n$是相容的，亦即：如果一個序列在$\|\cdot\|_m$之下趨近於0，且在$\|\cdot\|_n$之下爲一Cauchy序列，則它在$\|\cdot\|_n$之下就收斂到0；故我們可假設這些範數排成遞增次序：

$$\|\cdot\|_0\leq\|\cdot\|_1\leq\cdots\leq\|\cdot\|_n\leq\cdots,$$

由此可得下列的包含關係：

$$E_0\supset E_1\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots.$$

取$\|\cdot\|_0$爲基本的範數，作出E_n的偶件空間E_n^*，故有

$$E_0 = E_0^* \subset E_1^* \subset \cdots \subset E_n^* \subset \cdots.$$

令 $\|\cdot\|_{-n}$ 為Hilbert 空間E_n^* 的範數，則 $\{\|\cdot\|_n : -\infty < n < \infty\}$ 一族遞增的Hilbert 範數。進一步，E 的偶伴空間E^* 可表爲

$$E^* = \bigcup_n E_n^*.$$

下面我們恒假設，一個具有可列範的Hilbert 空間的可列多個範數，E_n，E_n^* 皆排成線性次序（如果必要的話我們可以將 $\|\cdot\|_n$ 重排而不影響E的位相）。

【定義A.4】

設E爲一個具有可列範的Hilbert 空間。如果對任意m存在$n > m$使得嵌射

$$T_m^n : E_n \to E_m$$

爲核子算子：則E稱爲一個具可列範的Hilbert 核式空間或簡稱爲一個核式空間。

[註解] 當然，核式空間的定義可以推廣。此地我們採取較局限但具體的定義，這樣較適合本書的用途。

現在我們給出核式空間的一些重要例子，並且討論跟每一空間有關的一些論題。

【例1】

$\mathscr{D}(\pi)$ 空間。令 $\mathscr{D}(\pi)$ 表示單位圓（半徑爲 1 ）上所有 $\mathscr{C}^\infty$ 函數，再令$\zeta(\theta)$，$-\pi \leq \theta \leq \pi$ 表 $\mathscr{D}(\pi)$ 中的任意元素。

今引入可列多個範數 $\|\cdot\|_n$，對於$\zeta \in \mathscr{D}(\pi)$，定義

$$\|\zeta\|_n^2 = \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} |\zeta^{(k)}(\theta)|^2 \, d\theta, \qquad n \geq 0, \tag{A.9}$$

其中$\zeta^{(k)}$ 表ζ的第k階導函數，並規定$\zeta^{(0)} = \zeta$。顯然每個$\|\cdot\|_n$皆爲一

個Hilbert 範數，並且我們有

$$\|\cdot\|_n \leq \|\cdot\|_{n+1}, \qquad n \geq 0. \tag{A.10}$$

特別地，$\|\xi\|_0$ 爲通常的 $L^2([-\pi,\pi])$ 範數。

將 $\mathscr{D}(\pi)$ 對 $\|\cdot\|_n$ 作完備化得到的 Hilbert 空間記爲 $\hat{H}_n$。由不等式 (A.10) 可得

$$\hat{H}_n \supset \hat{H}_{n+1},$$

其中 $\hat{H}_0$ 等於 $L^2([-\pi,\pi])$。可以證明：$\hat{H}_n$ 正好是這樣的函數所成的空間：$\mathscr{C}^{(n-1)}$ 函數，其第 $n-1$ 階導函數爲絕對連續且具有 Radon-Nikodym 導微屬於 $L^2([-\pi,\pi])$。由此可知

$$\bigcap_n \hat{H}_n = \mathscr{D}(\pi). \tag{A.11}$$

現在我們展示 Hilbert 空間序列 $\hat{H}_n$，$n \geq 0$，最有用的一個層面，亦即，存在有一共同的完備直交系統（么正化跟 $\hat{H}_n$ 有關！）如下：

$$\{(2\pi)^{-1/2}, \pi^{-1/2}\sin k\theta, \pi^{-1/2}\cos k\theta : k \geq 1\}. \tag{A.12}$$

這只是 $\hat{H}_0$ 中的么正系統。在 $\hat{H}_n$ 中而言，$n \geq 1$，我們算得

$$\begin{aligned} &\|(2\pi)^{-1/2}\|_n^2 = 1 \\ &\|\pi^{-1/2}\sin k\theta\|_n^2 = \|\pi^{-1/2}\cos k\theta\|_n^2 = 1 + k^2 + \cdots + k^{2n}. \end{aligned} \tag{A.13}$$

由 $\|\cdot\|_n$ 與 $\hat{H}_n$ 的定義立即可推得：當 $m < n$ 時，嵌射 $T_m^n : \hat{H}_n \to \hat{H}_m$ 是連續的。事實上我們有更強的結果：

【命題A.3】

對任意 $n \geq 0$，嵌射 T_n^{n+1} 爲 Hilbert-Schmidt 算子。

［證明］　只需證明：對於 $\hat{H}_{n+1}$ 中的某一完備么正系統 $\{\zeta_k\}$，我們有

$$\sum_k \|T_n^{n+1}\zeta_k\|_n^2 < \infty,$$

因爲此和爲 Hilbert-Schmidt 範數 $\|T_n^{n+1}\|_2$ 的平方。今取完備直交系統

(A.12)，利用(A.13)作么正化，得到$\hat{H}_{n+1}$中的完備么正系統：

$$\left\{(2\pi)^{-1/2}, \left(\pi\sum_{j=0}^{n+1}k^{2j}\right)^{-1/2}\sin k\theta, \left(\pi\sum_{j=0}^{n+1}k^{2j}\right)^{-1/2}\cos k\theta\colon k\geq 1\right\} \qquad (A.12')$$

我們就取此系統爲$\{\zeta_k\}$。注意到T_n^{n+1}將$\hat{H}_{n+1}$的一個函數映至相同的函數，但視爲$\hat{H}_n$的元素。利用(A.13)很容易算出和$\sum_k\|T_n^{n+1}\zeta_k\|_n^2$爲

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sum_{j=0}^{n}k^{2j}}{\sum_{j=0}^{n+1}k^{2j}}<\infty$$

這就證明了T_n^{n+1}爲一個Hilbert-Schmidt算子。 #

今我們看出T_n^{n+1}爲一核式算子，故空間$\hat{D}(\pi)$可由$\|\cdot\|_n$，$n\geq 1$，位相化成一個核式空間。

【例2】

$\mathscr{D}(K)$空間，K爲有限區間。設$\mathscr{D}(K)$爲定義在K上的$\mathscr{C}^\infty$函數所成的空間，並且這些函數及其所有各階導微在K的邊界取值爲0。

讓我們取$K=[-\pi,\pi]$，則$\mathscr{D}([-\pi,\pi])\equiv\mathscr{D}(\pi)$可視爲$\hat{\mathscr{D}}(\pi)$的子集，並且我們引入由$\hat{\mathscr{D}}(\pi)$誘導於$\mathscr{D}(\pi)$的相對位相，亦即我們取(A.9)的範數$\|\cdot\|_n$，$n\geq 0$。我們記$\mathscr{D}(\pi)$對$\|\cdot\|_n$的完備化爲$H_n$。雖然如前述，我們仍有$H_0=L^2([-\pi,\pi])$，但是當$n\geq 1$時，我們有

$$H_n \subsetneqq \hat{H}_n.$$

H_n在$\hat{H}_n$的直交補直空間$\hat{H}_n\ominus H_n$是有限維的；事實上

$$H_n=\{\xi\in\hat{H}_n;\ \xi^{(k)}(-\pi)=\xi^{(k)}(\pi)=0,\ k=0,1,\ldots,n-1\}.$$

利用這個結果與例1中的命題A.3，我們可以證明嵌射

$$H_{n+1}\to H_n$$

爲Hilbert-Schmidt算子。

我們也可以證明

$$\bigcap_n H_n = \mathscr{D}(\pi),$$

因此 $\mathscr{D}(\pi)$ 亦爲一個核式空間。

當K爲一般（有限）區間的情形，我們可以對 $\zeta(u)$ 的 u 作線性變換將討論化約成有關$[-\pi, \pi]$上的問題，這樣的線性變換對核式空間的結構並沒有基本上的改變。

下一個例子也是由$\mathscr{D}(\pi)$經過對 u 作變換而仍保持核式空間的構造不變而得到的，但是這次的變換是非線性變換。

【例 3】

D_0 空間。這個空間定義爲

$$D_0 = \{f(u) \in \mathscr{C}^\infty : |u|^{-1} f(u^{-1}) \in \mathscr{C}^\infty\}$$

我們對D_0引入位相，使得D_0與$\mathscr{D}(\pi)$同胚。首先考慮映射γ，將$\zeta(\theta)$，$-\pi < \theta < \pi$，映至函數$f(u)$，$-\infty < u < \infty$，定義如下：

$$\gamma: \xi(\theta) \to f(u) \equiv (\gamma\xi)(u) = \sqrt{2}(1+u^2)^{-1/2}\xi(2\tan^{-1} u). \tag{A.14}$$

如果$\zeta \in L^2(S')$，其中S'表單位圓，則$f = \gamma\zeta \in L^2(\mathbf{R})$，反之亦成立，進一步，

$$\|\xi\|_{L^2(S^1)} = \|f\|_{L^2(\mathbf{R})},$$

因此我們可以證明γ爲$L^2(S')$與$L^2(R')$之間的線性同構。

如果ζ可微分，則$f = \gamma\zeta$ 亦然，反之亦成立。爲了看出這個逆結果，我們記逆映射γ^{-1}爲下形：

$$(\gamma^{-1}f)(\theta) \equiv \xi(\theta) = \left(\sqrt{2}\left|\cos\frac{1}{2}\theta\right|\right)^{-1} f\left(\frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}\right)$$

於是我們看出，只有當$f(u)$與$|u|^{-1}f(u^{-1})$均爲$\mathscr{C}^\infty$時，$\gamma^{-1}f$才屬於$\mathscr{D}(\pi)$，從而證明了等式

$$\gamma(\hat{D}(\pi)) = D_0$$

我們已建立了 $\mathscr{D}(\pi)$ 與 D_0 的對應，要明白決定Hilbert 空間 H_n^0 及其範數 $\|\cdot\|_n$ 就很容易了。我們利用下列的圖式，其中 γ 恒爲一同構

$$\begin{array}{ccccccc} \mathscr{D}(\pi) & \subset \cdots \subset & \hat{H}_n & \subset \cdots \subset & L^2(S^1) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ D_0 & \subset \cdots \subset & H_n^0 & \subset \cdots \subset & L^2(\mathbf{R}). \end{array}$$

Hilbert 空間 H_n^0 爲 D_0 相對於範數 $\|\cdot\|_n$ 的完備化，其中 $\|\cdot\|_n$ 定義如下:

$$\|f\|_n^2 = \sum_{j=0}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-2j} \left|\left\{(1+u^2)\frac{d}{du} + u\right\}^j f(u)\right|^2 du,$$

此範數相應於核式空間 $\mathscr{D}(\pi)$ 的第 n 個範數（A.9）。以前我們注意過，$\hat{H}_n$ 的完備直交系統爲（A.12），對應地，H_n^0 的完備么正系統可表成下形:

$$\pi^{-1/2}(1+u^2)^{-1/2};$$

$$\sqrt{2}\left\{\pi\sum_{j=0}^{n} k^{2j}\right\}^{-1/2}(1+u^2)^{-k-1/2}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{2k}{2l+1}(-1)^l u^{2l+1}, \qquad k \geq 1;$$

$$\sqrt{2}\left\{\pi\sum_{j=0}^{n} k^{2j}\right\}^{-1/2}(1+u^2)^{-k-1/2}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{2k}{2l}(-1)^l u^{2l}, \qquad k \geq 1.$$

可以證明

$$\bigcap_n H_n^0 = D_0,$$

並且 D_0 由上述之範數 $\|\cdot\|_n$，$n \geq 0$，賦予位相構造。由 H_{n+1}^0 到 H_n^0 的嵌射亦爲Hilbert - Schmidt 算子，因此 D_0 爲一個核式空間。最後我們注意到，D_0 的進一步更詳細的構造可以由 $\mathscr{D}(\pi)$ 透過變換 γ 來得到。

【例4】

Schwartz 空間 $\mathscr{S}$。這個空間是由 $\mathbf{R}$ 上的一族函數所構成的，定義如下

$$\mathscr{S} = \left\{\xi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}) : |||\xi|||_n = \max_{0 \leq k \leq n} \sup_u |(1+u^2)^n \xi^{(k)}(u)| < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\right\},$$

且由範數 $|||\cdot|||_n$ ，$n \geq 0$ ，賦予位相。等價地說，我們是取集合

$$U_{n,k}(\varepsilon) = \left\{\xi : \sup_u |(1+u^2)^n \xi^{(k)}(u)| < \varepsilon\right\}, \qquad n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n,\ \varepsilon > 0,$$

當作 0 點的基本近旁系，所產生出來的位相。

首先我們證明 $\mathscr{S}$ 爲具可列範之 Hilbert 空間。爲此，我們引入另一族範數 $\|\cdot\|_n$ ，$n \geq 0$ ，定義爲

$$\|\xi\|_n^2 = \sum_{k=0}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} (1+u^2)^n |\xi^{(k)}(u)|^2\, du.$$

這些顯然形成一族遞增的 Hilbert 範數，並且 $\{|||\cdot|||_n : n \geq 0\}$ 與 $\{\|\cdot\|_n : n \geq 0\}$ 在 $\mathscr{S}$ 上定義出相同的位相。這是下面補題的立即結論：

【補題 A.1】

對於任意 $n \geq 1$ ，存在常數 C_n 與 D_n 使得對任意 $\xi \in \mathscr{S}$ 我們有

$$C_n |||\xi|||_{n-1} \leq \|\xi\|_n \leq D_n |||\xi|||_{n+1}. \tag{A.15}$$

［證明］　因爲當 $k \leq n$ 時，

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+u^2)^n |\xi^{(k)}(u)|^2\, du \leq \sup_u [(1+u^2)^{n+1} |\xi^{(k)}(u)|^2] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+u^2)^n}{(1+u^2)^{n+1}}\, du.$$

故（A.15）之右邊不等式很容易獲得到。另一方面，若 $k < n$ ，則有

$$\begin{aligned}
&|(1+u^2)^{n-1}\xi^{(k)}(u)| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{u} \{(1+u^2)^{n-1}\xi^{(k)}(u)\}'\, du\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |(1+u^2)^{n-1}\xi^{(k+1)}(u)|\, du + n\int_{-\infty}^{\infty} |(1+u^2)^{n-1}\xi^{(k)}(u)|\, du \\
&\leq \left\{\int_{-\infty}^{\infty} (1+u^2)^{-2}\, du\right\}^{1/2} \left[\left\{\int_{-\infty}^{\infty} (1+u^2)^{2n} |\xi^{(k+1)}(u)|^2\, du\right\}^{1/2} \right. \\
&\qquad \left. + n\left\{\int_{-\infty}^{\infty} (1+u^2)^{2n} |\xi^{(k)}(u)|^2\, du\right\}^{1/2}\right] \\
&\leq C_n^{-1}\|\xi_n\|, \qquad \text{其中} C_n \text{爲一常數}
\end{aligned}$$

對 u 取 sup ，就得到 (A.15) 之左邊不等式。 #

令 $\mathscr{S}_n$ 表 $\mathscr{S}$ 相對於 Hilbert 範數 $\|\cdot\|$ 之完備化。容易證明

$$\bigcap_n \mathscr{S}_n = \mathscr{S},$$

因此就證明了 $\mathscr{S}$ 爲一個具可列範之 Hilbert 空間。

下一步是證明 $\mathscr{S}$ 爲一個核式空間。爲達此目的，我們先建立 $\mathscr{S}$ 與空間 s 之間的同構，其中 s 定義如下：對所有序列 $x=\{x_n: n\geq 0, x_n\in\mathbb{R}\}$ 所成的空間引入一族 Hilbert 範數 $\|\cdot\|_p$，$p\geq 0$，定義爲

$$\|x\|_p^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^p x_n^2. \tag{A.16}$$

此向量空間由諸範數 $\|\cdot\|_p$ 賦予位相後記爲 s。可以證明 s 是完備的且稠密於 l^2。現在我們證明

【補題A.2】

Schwartz 空間 $\mathscr{S}$ 同構於上述定義的位相向量空間 $\mathscr{S}$。

［證明］ 我們利用 $L^2(\mathbb{R})$ 中的完備么正系統 $\{\zeta_n\}$：

$$\zeta_n(u)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2}H_n(u)\exp(-\tfrac{1}{2}u^2), \qquad n\geq 0,$$

參見第 A.5 節之公式 (A.25)。對 $\zeta\in\mathscr{S}$ 作 Fourier 級數展開

$$\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}x_n\zeta_n,$$

得到一個從 $\mathscr{S}$ 到 l^2 的映射：

$$\zeta\to x=\{x_n: n\geq 0\}\in l^2, \qquad \zeta\in\mathscr{S}.$$

於是我們利用第 A.5 節中有關 $\zeta_n'(u)$ 與 $u\zeta_n(u)$ 的公式 (A.26) 來證明上述映射爲一個對射，並且進一步由簡單計算可知此映射爲一個同胚。然而我們注意到，在上述映射下，範數 $\|\zeta\|_n$ 不見得對應到 $\|x\|_n$。 #

容易證明 s 爲一個核式空間。事實上，這個證明跟 $\mathscr{D}(\pi)$ 的情形在精神上是類似的，甚至更簡單。這個事實，再加上補題A.2，就證明了 $\mathscr{S}$ 爲一個核式空間。

【例5】

序列空間 s，如上例所述，s 爲一個核式空間。因爲它是實數列所成的空間，故比其它核式空間容易處理。如果我們希望將 s 的結果遷移到一個函數空間上，如 $\mathscr{S}$，我們需要利用 s 的性質及如上述的完備么正系統 $\{\zeta_n\}$。

【例6】

空間 $\mathscr{D}$。令 $\{K_n : n \geq 0\}$ 爲一列遞增的緊緻區間使得 $\bigcup_n K_n = \mathbf{R}$。我們定義空間 $\mathscr{D}$ 爲空間 $\mathscr{D}(K_n)$ 的逆納極限（inductive limit）：

$$\mathscr{D} = \varinjlim_{n} \mathscr{D}(K_n).$$

容易驗證，這個極限跟所取的序列 $\{K_n\}$ 無關。顯然 $\mathscr{D}$ 爲由具有緊緻擔台的 $\mathscr{C}^\infty$ 函數所成的向量空間，其位相可以描述如下：一個序列 $\{\zeta_j\} \subseteq \mathscr{D}$ 收斂到0若且唯若所有 ζ_j 的擔台落在某緊緻集內，並且對任意固定的 k，ζ_j 的 k 階以下導微均勻收斂到0。

$\mathscr{D}$ 上的一個連續線性泛函就是L. Schwartz（1950－1）意味的荷佈（distribution）。

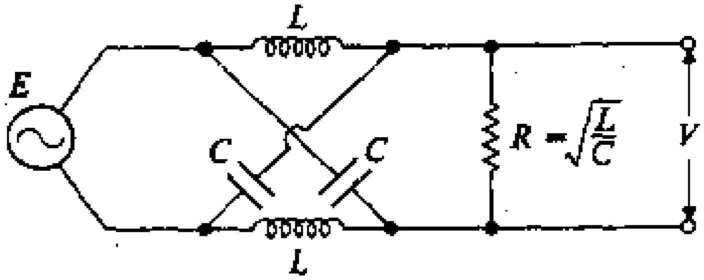
如本書所定義的空間 $\mathscr{D}$，並不是具可列範之Hilbert空間，但是Bochner-Minlos定理（第3.2節定理3.2）仍然成立，這是因爲 $\mathscr{D}$ 爲核式空間的逆納極限之緣故。

A.4 Wiener 的非線性網路理論

N. Wiener 在 1958 年出版的書裡，他敍述了一個建構電路網的實際方法。這個方法最早是由Wiener與Y.W. Lee聯合提出的，它可以利用一個給定的白噪聲作爲輸入品，來建構任何 (L^2) 泛函。我們要來展示Lee-Wiener的網路理論，並且指明它與 (L^2) 的Wiener-Itô分解之間的關連。

[1] Lee-Wiener 的電路網

首先我們考慮如圖A.1所示之四端點網路。假設線圈的感應係數為L henry，電容器的電容為C farad。於是電阻必為$(L/C)^{12}$ Ohm。



圖A.1

當我們供給一個電位差$E_\omega = E_\omega(t) = \exp[i\omega t]$，$\omega = 2\pi f$，$f$為頻率，我們就可由Kirchhoff 第一、二定律來求算網路上任何一部分的電流與電位降。事實上，輸入的阻抗為純粹的電阻等於$(L/C)^{12}$，轉移函數為

$$\frac{V_\omega}{E_\omega} = \frac{1 - i\omega(LC)^{1/2}}{1 + i\omega(LC)^{1/2}}.$$

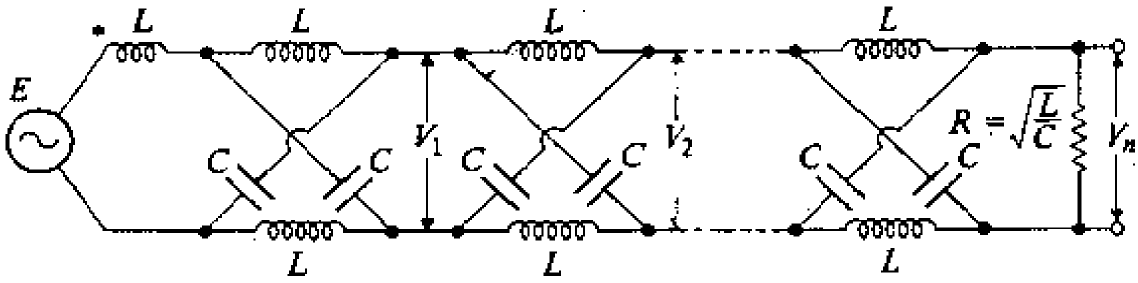
相角延遲(phase delay)為$\sin^{-1}[2\omega(LC)^{12}]$。最有趣的事是這個網路可以互相密合，因為若$n$個這類電路串聯起來，則轉移函數變成

$$\left\{\frac{1 - i\omega(LC)^{1/2}}{1 + i\omega(LC)^{1/2}}\right\}^n.$$

結果$|V|$恒等於$|E|$。當我們置一個感應係數為L henry之感應圈於電源E與第一個電路之間，如下面圖A.2所標示的＊，於是可將上述轉移函數乘以額外的一個因子$(L/C)^{12}\{1 + i\omega(LC)^{12}\}^{-1}$。

今我們可以機械地來建構一個網路，具有轉移函數為

$$\frac{V_{n,\omega}}{E_\omega} = \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2} \frac{\{1 - i\omega(LC)^{1/2}\}^n}{\{1 + i\omega(LC)^{1/2}\}^{n+1}}, \qquad n \geq 0.$$



圖A.2

今後令 $LC=1$（這可以想成只不過是改變時間的尺度），則我們有一族函數

$$L\cdot\frac{(1-i\omega)^n}{(1+i\omega)^{n+1}},\qquad n\geq 0,$$

並且我們將看出，它們是由 Laguerre 函數作 Fourier 變換得來的。

[2] Laguerre 函數

考慮Laguerre 函數所成的系統 $\{L_n^{(\alpha)}(x):x\geq 0,\ n\geq 0\}$，定義爲

$$L_n^{(\alpha)}(x)=(n!)^{-1}e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}),\qquad \alpha>-1.$$

在 $\alpha=0$ 的情形，我們簡寫成 $L_n(x)$。這些函數都是 x 的多項式，可寫成下形：

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-x)^k}{k!}.$$

如果我們令

$$l_n(x)=2^{1/2}e^x L_n(-2x),\qquad x\leq 0,$$

則 $\{l_n(x):n\geq 0\}$ 爲週知的 $L^2((-\infty,0])$ 中的完備么正系統。我們令 $l_n(x)=0$，當 $x>0$ 時，這就將 $l_n(x)$ 延拓成定義在 $(-\infty,\infty)$ 上，而仍然使用相同的記號。$l_n(x)$ 的Fourier 變換 $\hat{l}_n(\omega)$ 爲

$$\hat{l}_n(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{0} e^{i\omega x} l_n(x)\, dx = (2\pi)^{-1/2} \frac{(1-i\omega)^n}{(1+i\omega)^{n+1}}.$$

此地我們用 ω 當變數是爲了配合上述〔1〕所用的記號。除了差個常數之外，$\hat{l}_n(\omega)$ 跟上述圖A.2的電路網之轉移函數相同。

〔3〕 輸入白噪聲之輸出

讓我們考慮白噪聲（$\mathscr{S}^*$，$\mathfrak{A}$，μ）。如第3.4節最後一段所述，白噪聲的值譜是平頭式的，而且延展於整個實數軸上。換言之，白噪聲的"所有的頻率皆平等地表現"，故白噪聲的輸入可以看作是由成分 $e^{i\omega t}M(d\omega)$ 之疊合，其中 $M(d\omega)$ 爲均勻隨機測度。因此，輸出品可以表成下形〔參見第3.4節公式（3.32），但將 λ 換成 ω〕：

$$\langle x, \xi \rangle = \int \hat{\xi}(\omega) M(d\omega), \qquad \xi \in \mathscr{S}.$$

特別地，若 ξ 取爲 l_n，即若白噪聲通過一具有轉移函數爲 l_n 之線路，則我們有

$$\langle x, l_n \rangle = (2\pi)^{-1/2} \int \frac{(1-i\omega)^n}{(1+i\omega)^{n+1}} M(d\omega).$$

由此可得下面重要的結論：因爲 l_n 的擔台爲（$-\infty$, 0），故若 $t=0$ 看作是現在時刻，則 $\langle x, l_n \rangle$ 可看作是僅由過去的輸入而得的訊息。換言之，這個系統是因果的（causal）。

我們也有另一個觀察。因爲 $\{l_n : n \geq 0\}$ 爲 $L^2([-\infty, 0])$ 中之完備么正系統，故Fourier-Hermite 多項式可以得到，如第4.2節，並且它們構成 L_0^2 的一個基底（參見第4.4節推論1中的記號）。復次，所有次數爲 n 的這種多項式構成 $L_0^2 \cap \mathscr{H}_n$ 的一個基底。

最後一個問題，我們要研究：相應於Fourier-Hermite 多項式，如何實際建構非線性電路網？我們已經知道，Lee-Wiener 電路網對應於 $\langle x, l_n \rangle$，$n \geq 0$，故現在我們只需作乘法，並且只需考慮形如 $\hat{l}_n(\omega) e^{i\omega t}M(d\omega)$ 之元素的乘法。這樣的乘法最終可化約成求作平方，而已經有

許多已知的方法來做這件事。

因此我們已經知道，對於構成 L_1^2 的基底之 Fourier - Hermite 多項式，要如何來建構相應的非線性網路了。這就使得第 4.6 節 [4] 與第 5.5 節的結果可以有效的應用到實際問題上去。

A.5 Hermite 多項式的公式

[1] Hermite 多項式 H 多項式 $H_n(x)$

【定義】

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \qquad n \geq 0.$$

生成函數為

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{-t^2+2tx}$$

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!} \tag{A.17}$$

[例子]

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \tag{A.18}$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{A.19}$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \tag{A.20}$$

$$H_n(ax + \sqrt{1-a^2}\, y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(1-a^2)^{k/2} H_{n-k}(x) H_k(y). \tag{A.21}$$

特別地，

$$H_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = 2^{-n/2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_{n-k}(x)H_k(y)$$

$$H_m(x)H_n(x) = \sum_{k=0}^{m\wedge n}2^k k!\binom{m}{k}\binom{n}{k}H_{m+n-2k}(x) \tag{A.22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(ax+\sqrt{1-a^2}\,y)H_k(y)e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}\,2^k n!}{(n-k)!}a^{n-k}(1-a^2)^{k/2}H_{n-k}(x),$$

$$k \le n \tag{A.23}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = \delta_{n,m}\,2^n n!\sqrt{\pi} \tag{A.24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}\,\delta_{n,m}\,2^n n! \tag{A.24'}$$

若 $\xi_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt[4]{\pi}}}H_n(x)e^{-x^2/2}$， 則

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi_m(x)\xi_n(x)\,dx = \delta_{m,n}; \tag{A.25}$$

$\{\xi_n; n \ge 0\}$ 爲 $L^2(\mathbf{R})$ 中的完備么正系統

$$\begin{cases} \xi_n'(x) = \sqrt{\dfrac{n}{2}}\,\xi_{n-1}(x) - \sqrt{\dfrac{n+1}{2}}\,\xi_{n+1}(x) \\ x\xi_n(x) = \sqrt{\dfrac{n}{2}}\,\xi_{n-1}(x) + \sqrt{\dfrac{n+1}{2}}\,\xi_{n+1}(x), \qquad n \ge 1 \end{cases} \tag{A.26}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}H_n(y)e^{-y^2/2}\,dy = i^n H_n(x)e^{-x^2/2} \tag{A.27}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}H_n(y)e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2}}(ix)^n e^{-x^2/4} \tag{A.28}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}y^n e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{i}{2}\right)^n H_n\left(\frac{x}{2}\right)e^{-x^2/4} \tag{A.29}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (x+iy)^n e^{-y^2/2}\,dy = 2^{-n/2}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{A.30}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} H_n\left(\frac{i}{\sqrt{2}}x+y\right)e^{-y^2/2}\,dy = i^n H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{A.31}$$

[2] 具有參數之Hermite 多項式

【定義】

$$H_n(x;\sigma^2)=\frac{(-\sigma^2)^n}{n!}e^{x^2/2\sigma^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2\sigma^2},\ \sigma>0,\ n\geq 0.$$

生成函數爲

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^nH_n(x;\sigma^2)=e^{-\sigma^2t^2/2+tx},\qquad t\in C,$$

$$H_n(x;\sigma^2)=\frac{\sigma^n}{n!\,2^{n/2}}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right). \tag{A.32}$$

[例子]

$H_0(x;\sigma^2)\equiv 1,\quad H_1(x;\sigma^2)=x,$

$H_2(x;\sigma^2)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\sigma^2,\quad H_2(x;\sigma^2)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}\sigma^2x,$

$H_4(x;\sigma^2)=\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{4}\sigma^2x^2+\frac{1}{8}\sigma^4.$

$$H_n''(x;\sigma^2)-\frac{x}{\sigma^2}H_n'(x;\sigma^2)+\frac{n}{\sigma^2}H_n(x;\sigma^2)=0\qquad (' \text{ 意指 } d/dx) \tag{A.33}$$

$$H_n'(x;\sigma^2)=H_{n-1}(x;\sigma^2) \tag{A.34}$$

$$H_{n+1}(x;\sigma^2)-\frac{x}{n+1}H_n(x;\sigma^2)+\frac{\sigma^2}{n+1}H_{n-1}(x;\sigma^2)=0 \tag{A.35}$$

$$\sum_{k=0}^{n}H_{n-k}(x;\sigma^2)H_k(y;\tau^2)=H_n(x+y;\sigma^2+\tau^2)\qquad \text{[S. Kakutani (1950)]} \tag{A.36}$$

$$H_m(x;\sigma^2)H_n(x;\sigma^2)=\sum_{k=0}^{m\wedge n}\frac{\sigma^{2k}(m+n-2k)!}{k!\,(m-k)!\,(n-k)!}H_{m+n-2k}(x;\sigma^2) \tag{A.37}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int H_m(x;\sigma^2)H_n(x;\sigma^2)e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx=\delta_{m,n}\frac{\sigma^{2n}}{n!}. \tag{A.38}$$

若 $\eta_n(x;\sigma^2)=\frac{\sqrt{n!}}{\sigma^n}H_n(x;\sigma^2)$，則 $\{\eta_n;n\geq 0\}$ 爲

$$L^2\left(\mathbf{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx\right). \text{ 中的完備么正系統} \tag{A.39}$$

[3] 複値的Hermite多項式〔K. Itô(1953a)〕

【定義】

$$H_{p,q}(z, \bar{z}) = (-1)^{p+q} e^{z\bar{z}} \frac{\partial^{p+q}}{\partial \bar{z}^p\, \partial z^q} e^{-z\bar{z}}, \qquad z \in C,\ p, q \geq 0.$$

生成函數爲

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{\bar{t}^p t^q}{p!\,q!} H_{p,q}(z, \bar{z}) = e^{-t\bar{t}+t\bar{z}+\bar{t}z}, \qquad t \in C$$

$$\begin{cases} H_{p,q}(z, \bar{z}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p\wedge q} (-1)^k \frac{p!\,q!}{k!\,(p-k)!\,(q-k)!} z^{p-k} \bar{z}^{q-k} \\ H_{p,q}(z, \bar{z}) = \overline{H_{q,p}(z, \bar{z})}. \end{cases} \tag{A.40}$$

[例子]

$$H_{0,0}(z, \bar{z}) \equiv 1, \quad H_{p,0}(z, \bar{z}) = z^p,$$
$$H_{1,1}(z, \bar{z}) = z\bar{z} - 1, \quad H_{2,1}(z, \bar{z}) = z^2\bar{z} - 2z,$$
$$H_{2,2}(z, \bar{z}) = z^2\bar{z}^2 - 4z\bar{z} + 2,$$
$$H_{3,1}(z, \bar{z}) = z^3\bar{z} - 3z^2, \quad H_{3,2}(z, \bar{z}) = z^3\bar{z}^2 - 6z^2\bar{z} + 6z,$$
$$H_{3,3}(z, \bar{z}) = z^3\bar{z}^3 - 9z^2\bar{z}^2 + 18z\bar{z} - 6.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} H_{p,q}(z, \bar{z}) - \bar{z} \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} H_{p,q}(z, \bar{z}) + q H_{p,q}(z, \bar{z}) = 0 \\ \dfrac{\partial^2}{\partial \bar{z}\, \partial z} H_{p,q}(z, \bar{z}) - z \dfrac{\partial}{\partial z} H_{p,q}(z, \bar{z}) + p H_{p,q}(z, \bar{z}) = 0 \end{cases} \tag{A.41}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} H_{p,q}(z, \bar{z}) = p H_{p-1,q}(z, \bar{z}) \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} H_{p,q}(z, \bar{z}) = q H_{p,q-1}(z, \bar{z}) \end{cases} \tag{A.42}$$

$$\begin{cases} H_{p+1,q}(z,\bar{z}) - zH_{p,q}(z,\bar{z}) + qH_{p,q-1}(z,\bar{z}) = 0 \\ H_{p,q+1}(z,\bar{z}) - \bar{z}H_{p,q}(z,\bar{z}) + pH_{p-1,q}(z,\bar{z}) = 0 \end{cases} \tag{A.43}$$

$\left\{\dfrac{1}{\sqrt{p!q!}} H_{p,q}(z,\bar{z});\ p \geq 0,\ q \geq 0\right\}$ 爲Hilbert 空間

$$L^2\left(\mathbf{C}, \frac{i}{2\pi} e^{-z\bar{z}}\, dz \wedge d\bar{z}\right) \text{ 中的完備么正系統} \tag{A.44}$$

$$\sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} H_{p,q}(x,x) = H_n(x), \quad x \text{ 爲實數} \tag{A.45}$$

［註解］　具有參數的複値 Hermite 多項式。

【定義】

$$H_{p,q}(z,\bar{z};\sigma^2) = \frac{(-\sigma^2)^{p+q}}{p!q!} e^{z\bar{z}/\sigma^2} \frac{\partial^{p+q}}{\partial \bar{z}^p\, \partial z^q} e^{-z\bar{z}/\sigma^2}, \qquad \sigma > 0,\ p, q \geq 0$$

生成函數爲

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} \bar{t}^p t^q H_{p,q}(z,\bar{z};\sigma^2) = e^{-\sigma^2 t\bar{t}+t\bar{z}+\bar{t}z}, \qquad t \in C.$$

參考文獻

下面所列的論文與書都是有關本書討論的或相關的論題所涉及的參考資料。那些原先是以俄文所寫的資料，若有英譯本存在，此地我們就列英譯本。

Aczél, J. (1966). Functional Equations and Their Applications. Academic, New York.

Araki, H. (1971), On representations of the canonical commutation relations. *Commun. Math. Phys.* **20**, 9–25.

Bachelier, L. (1941), Probabilités des oscillations maxima. *C.R. Académie Sci. Paris* **212**, 836–838 (Erratum: **213**, 220).

Balakrishnan, A. V. (1974), Stochastic optimization theory in Hilbert space 1. *Appl. Math. Optimization* **1**, 97–120.

Bochner, S. (1932), Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft.

— (1955), Harmonic Analysis and the Theory of Probability. Univ. of Calif. Press, Berkeley, CA.

Brown, R. (1828), A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philos. Mag. Ann. of Philos. New ser.* **4**, 161–178.

Cameron, R. and Martin, W. T. (1944), Transformations of Wiener integrals under translations. *Ann. Math. 2* **45**, 386–396.

— (1945), Fourier-Wiener transforms of analytic functionals. *Duke Math. J.* **12**, 489–507.

— (1947a), Fourier-Wiener transforms of functionals belonging to L_2 over the space C. *Duke Math. J.* 14, 99–107.

— (1947b), The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals. *Ann. Math.* 2 **48**, 385-392.

Chung, K. L., Erdös, P., and Sirao, T. (1959), On the Lipschitz's condition for Brownian motion. *J. Math. Soc. Japan* **11**, 263-274.

Doob, J. L. (1953), Stochastic Processes. Wiley, New York.

Dynkin, E. B. and Yushkevich, A. A. (1969), Markov Processes. Theorems and Problems. Plenum, New York (Russian original: Издательство Наука, 1967).

Feller, W. (1950), An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I. Wiley, New York (third edition, 1968).

— (1966), *ibid.*, vol. II (second edition, 1971).

Freedman, D. (1971), Brownian Motion and Diffusion. Holden-Day, San Francisco.

Fürth, R. (1956), Albert Einstein. Investigations on the Theory of the Brownian Movement. Dover, New York (Translated by Cowper, A. D.).

Gel'fand, I. M. and Yaglom, A. M. (1960), Integration in functional spaces and its applications in quantum physics. *J. Math. Phys.* **1**, 48-69.

Gel'fand, I. M. and Vilenkin, N. Ya. (1964), Generalized Functions, Vol. 4, Applications of Harmonic Analysis. Academic, New York (Russian original: Государственное Издательство, Физико-Математ. Литературы, 1961).

Helgason, S. (1962), Differential Geometry and Symmetric Spaces. Academic, New York and London.

Hida, T. (1960), Canonical representations of Gaussian processes and their applications. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A* **33**, 109-155.

— (1967), Finite dimensional approximations to white noise and Brownian motion. *J. Math. Mech.* **16**, 859-866.

— (1970a), Harmonic analysis on the space of generalized functions. *Theor. Probab. Appl.* **15**, 117-122.

— (1970b), Stationary Stochastic Processes. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

— (1971a), Quadratic functionals of Brownian motion. *J. Multivar. Anal.* **1**, 58-69.

— (1971b), Complex white noise and infinite dimensional unitary group. Lecture note, Nagoya Univ., Nagoya, Japan.

— (1973a), A role of Fourier transform in the theory of infinite dimensional unitary group. *J. Math. Kyoto Univ.* 13, 203-212.

— (1973b), Functionals of complex white noise. Proc. Symp. on continuum Mechanics and related problems of Analysis. Vol. 1, Tbilisi.

USSR, 355–366.
— (1975), Analysis of Brownian Functionals. Carleton Math. Lecture Notes No. 13.
— (1978), Causal calculus in terms of white noise. Bielefeld Encounters in Physics and Mathematics II, held at Bielefeld, December 1978.
— (1978), Generalized Brownian functionals. Complex Analysis and its Applications (in Russian), Jubilee Vol. of Academician I. N. Vekua, Nauka, Moskow, 586–590.
— (1978), White noise and Lévy's functional analysis. Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag. No. 695. 155–163.
Hida, T. and Ikeda, N. (1967), Analysis on Hilbert space with reproducing kernel arising from multiple Wiener integral. Proc. Fifth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probability. Vol. 2, Part 1, 117–143.
Hida, T., Kubo, I., Nomoto, H., and Yoshizawa, H. (1968), On projective invariance of Brownian motion. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A* **4**, 595–609.
Hida, T. and Nomoto, H. (1964), Gaussian measure on the projective limit space of spheres. *Proc. Japan Acad.* **40**, 301–304.
Hida, T. and Streit, L. (1977), On quantum theory in terms of white noise. *Nagoya Math. J.* **68**, 21–34.
Hitsuda, M. (1968), Representation of Gaussian processes equivalent to Wiener process. *Osaka J. Math.* **5**, 299–312.
Ikeda, I., Hida, T., and Yoshizawa, H. (1962), Theory of flows I (in Japanese), Seminar on Probability, Vol. 12, Probability Seminar.
Itô, K. (1951a), On stochastic differential equations. Mem. Amer. Math. Soc. No. 4.
— (1951b), Multiple Wiener integral. *J. Math. Soc. Japan* 3, 157–169.
— (1953a), Complex multiple Wiener integral. *Japan. J. Math.* 22, 63–86.
— (1953b), Stationary random distributions. *Mem. Coll. Sci., Univ. of Kyoto, Ser. A* **28**, *Math.* 209–223.
— (1953c), Theory of Probability (in Japanese), Iwanami, Tokyo.
Itô, K. (1956), Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments. *Trans. Amer. Math. Soc.* 81, 253–263.
— (1961), Lectures on stochastic processes. Tata Institute of Fundamental Research.
Itô, K. and McKean Jr., H. P. (1965), Diffusion processes and their sample paths. Springer-Verlag, Berlin, New York.
Iwahori, N. (1957), Theory of Lie groups I, II (in Japanese). Iwanami

series of modern Applications of Mathematics A 3, I, II.

Kac, M. (1951), On some connections between probability theory and differential and integral equations. Proc. Second Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probability, 189–215.

— (1959), Probability and Related Topics in Physical Sciences. Interscience, New York.

Kailath, T. (1971), The structure of Radon–Nikodym derivatives with respect to Wiener and related measures. *Ann. Math. Statist.* **42**, 1054–1067.

Kakutani, S. (1948), On equivalence of infinite product measures. *Ann. of Math.* **49**, 214–224.

— (1950), Determination of the spectrum of the flow of Brownian motion. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **36**, 319–323.

Kallianpur, G. (1970), The role of reproducing kernel Hilbert spaces in the study of Gaussian processes. *Adv. Probabil. Related Topics* **2**, 49–83. Dekker, New York.

Kallianpur, G. (1970), The role of reproducing kernel Hilbert spaces in the study of Gaussian processes. In Adv. Probabil. Related Topics **2**, 49–83. Dekker, New York.

Колмогоров, А. Н. (1958), Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств лебега. *Док. Акад. НАУК, СССР* **119**, 861–864.

Lévy, P. (1937), Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars, Paris.

— (1940), Le mouvement brownien plan. *Amer. J. Math.* **62**, 487–550.

— (1948), Processus stochastiques et mouvement brownien. [2ème éd. revue et augmenté (1965).] Gauthier-Villars, Paris.

— (1951), Problèmes concrets d'analyse fonctionelle. Gauthier-Villars, Paris.

— (1953), La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien. *G. Ist. Ital. Attuari* **16**, 1–37.

— (1954), Le mouvement brownien. Mém. des Sci. Math. CXXXVI. Gauthier-Villars, Paris.

— (1956), A special problem of Brownian motion, and a general theory of Gaussian random functions. Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probability, Vol. 2, 133–175.

— (1957), Fonctions aléatoires à corrélation linéaire. *Illinois J. Math.* **1**, 217–258.

— (1963), Le mouvement brownien fonction d'un ou de plusieurs paramètres. *Rend. Mat.* **22** (1–2), 24–101.

Linnik, Yu. V. (1964), Decomposition of Probability Distributions. Oliver and Boy Ltd. (Russian original: Разложения Вероятностных Законов, Москва. 1960).

Lukacs, E. (1970), Characteristic Functions. 2nd ed. Griffin, London.

McKean Jr., H. P. (1963), Brownian motion with a several-dimensional time. *Theor. Probability Appl.* **8**, 335–354.

— (1969), Stochastic Integrals. Academic, New York.

Miller Jr., W. (1968), Lie Theory and Special Functions. Academic, New York.

— Symmetries of differential equations. I. The heat equation. Lecture notes, Univ. Minnesota, Minneapolis.

Minlos, R. A. (1959), Generalized random processes and their extension to a measure. Selected transl. in Math. Statist. and Probability. Vol. 3, 291–313, 1962 (Russian original: Труды Московского Мат. Общества. Том. 8).

Nelson, E. (1967), Dynamical Theories of Brownian Motion. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

Neveu, J. (1964), Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson et Cie, Paris.

Orihara, A. (1966), Hermite polynomials and infinite dimensional motion group. *J. Math. Kyoto Univ.* **6**, 1–12.

Paley, R. E. A. C. and Wiener, N. (1934), Fourier transforms in the complex domain.' *Amer. Math. Soc. Colloq. Pub.* XIX.

Prokhorov, Yu. V. (1956), Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. *Theor. Probability Appl.* **1**, 157–214.

Rozanov, Ju. A. (1971), Infinite-dimensional Gaussian distributions. Transl. Amer. Math. Soc. (Russian original: Труды мат. инст. Стеклова. CVIII, 1968).

Sato, H. (1971), One-parameter subgroups and a Lie subgroup of an infinite dimensional rotation group. *J. Math. Kyoto Univ.* **11**, 253–300.

Schwartz, L. (1950–1), Théorie des distributions. Hermann Cie (2ème éd. 1966).

Schweber, Silvan S. (1966), An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. 2nd ed. Harper International Ed. Harper & Row and John Weatherhill, Inc., Tokyo.

Shepp, L. A. (1966), Radon–Nikodym derivatives of Gaussian measures. *Ann. Math. Statist.* **37**, 321–354.

Sirao, T. (1960), On the continuity of Brownian motion with a multi-dimensional parameter. *Nagoya Math. J.* **16**, 135–156.

Sinai, Ja. G. (1961), Dynamical systems with countably multiple Lebesgue spectrum. *Izv. Mat. Nauk USSR* **25**, 899–924. *Amer. Math. Soc. Transl.* 39 (2), 83–110 (1961).

Smithies, F. (1958), Integral Equations. Cambridge Univ. Press.

Takenaka, S. (1977), On projective invariance of multi-parameter Brownian motion. *Nagoya Math. J.* **67**, 89–120.

Titchmarsh, E. G. (1946), Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations. Clarendon Press, Oxford.

Totoki, H. (1971), Introduction to Ergodic Theory (in Japanese). Kyoritsu, Tokyo.

Umemura (Yamasaki), Y. (1965), Measures on infinite dimensional vector spaces. *Pub. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., Ser. A* **1**, 1–47.

von Neumann, J. (1931), Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren. *Math. Ann.* **104**, 570–578.

Weyl, H. (1928), Gruppentheorie und Quantenmechanik (English ed.: Transl. by H. P. Robertson, Methuen, 1931).

Wiener, N. (1923), Differential space. *J. Math. and Phys.* **2**, 131–174.

— (1928–29), Hermitian polynomials and Fourier analysis. *J. Math. and Phys.* **8**, 70–73.

— (1938), The homogeneous chaos. *Amer. J. Math.* **60**, 897–936.

— (1948), Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine. Wiley, New York (2nd ed. 1962).

— (1958), Nonlinear Problems in Random Theory. Technology Press of MIT, Cambridge.

Widder, D. V. (1946), Laplace Transform. Princeton Mathematical Series 6. Princeton University Press, Princeton, N.J.

Wiener, N. and Akutowicz, E. J. (1957), The definition and ergodic properties of the stochastic adjoint of a unitary transformation. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **6**, 205–217.

Xia Dao-Xing (1972), Measure and Integration Theory on Infinite-Dimensional Spaces. Academic, New York (Transl. by E. J. Brody).

Yoshizawa, H. (1970), Rotation group of Hilbert space and its application to Brownian motion. Proc. of the International Conference on Functional Analysis and related topics, 1969, Tokyo, 414–423.

Yosida, K. (1951), Functional Analysis I (in Japanese), Iwanami, Tokyo.

— (1965), Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin. (3rd ed., 1971, New York.)

英文索引

S

T

U

V

W

Y

中文索引

ㄩ